وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
الجامعة التقنية الشمالية
معهد التقني الدور

الحقيبة التعليمية

القسم العلمي:تقنيات الإلكترونية

اسم المقرر: تفاضل وتكامل

المرحلة / المستوى: الاول

الفصل الدراسي: الثاني

السنة الدراسية:٢٠٢٤/٢٠٢٥



معلومات عامة

اسم المقرر:	تفاضل وتكامل						
القسم:	الالكترونيك						
الكلية:	معهد تقني الدور						
المرحلة / المستوى	الاول						
الفصل الدراسي:	الثاني						
عدد الساعات الاسبوعية:	نظري	٤	عملي				
عدد الوحدات الدراسية:	٤						
الرمز:	TIDO101						
نوع المادة	نظري	*	عملي		كلهما		
هل يتوفر نظير للمقرر في الاقسام الاخرى	كلا						
اسم المقرر النظير	-						
القسم	-						
رمز المقرر النظير	-						

معلومات تدريسي المادة

اسم مدرس (مدرسي) المقرر:	جابر زين العابدين ساقي حسن
اللقب العلمي:	-
سنة الحصول على اللقب	-
الشهادة :	ماجستير
سنة الحصول على الشهادة	٢٠٢٣
عدد سنوات الخبرة (تدريس)	١٦

الوصف العام للمقرر

يتناول المقرر الاشتقاق ، الغايات ، تطبيقات التفاضل ، التكامل ، وطريقة الشرح ووسائله

موضوعات المقرر :

- تعريف الطالب باالمقرر ومفرداته ، اهمية المشتقة ورموز الاشتقاق
- قوانين ايجاد المشتقة لبعض الدوال
- مشتقة الدالة الضمنية Implicit function
- قوانين مشتقة الدوال المثلثية ، يوجد ٦ قوانين
- مشتقة الدالة الاسية ، امثلة محلولة
- مشتقة الدالة المركبة (الدالة البارامترية) Parametric differentiation
- تمارين في حساب المماس والعمود للدالة
- تمارين في حساب الغاية

تطبيقات التفاضل

- طريقة ايجاد نقاط الدوران (النهايات العظمى والنهايات الصغرى) للدالة
- نقطة انقلاب الدالة (التحول) ، تمارين محلولة

التكامـــــل

- التكامل الغير المحدد
- جدول التكامل الاساسي ، تمارين محلولة
- حل التكامل بالتجزئة
- تطبيقات على التكامل الغير المحدد
- التكامل المحدد
- ايجاد طول قوس المنحني (L)

الاهداف العامة

- العمل على مواكبة العصر، وتفسير تطورات العصر من الناحية العلمية ومن الناحية التكنولوجية كذلك، لأنها تعد لغة العصر، وأسلوبًا علميًا يستطيع عبره البشر التواصل فيما بينهم.
- العمل على استعمال المبادئ التي من دورها تفسير واقع الرياضيات، وإدماج فروعه ومجالاته مع بعضها لفهم الرياضيات وباقي العلوم الأخرى باختلاف أنواعها.
- العمل على تشجيع وتحفيز التفكير بشكل منطقي المبني على الاستنتاجات والبراهين.
- العمل على ربط الرياضيات بمجالات العلوم الأخرى، كالأحياء، والفيزياء، والطب، والكيمياء، والاقتصاد، والزراعة، والصناعة، وغيرها من المجالات الأخرى.
- التنويه إلى دور الرياضيات الكبير في تقدم علم الحاسب الآلي والتكنولوجيا، حيث ساعد الرياضيات في ضبط وبرمجة الحاسوب وبرامجه (نظام العد الثنائي).

الأهداف الخاصة

- اكساب المتعلم مهارات اسس التكامل وقوانينها وعلاقته بالتفاضل
- إلمام المتعلم بالدوال المثلثية والتكامل المحدد والغير المحدد
- التركيز على حل الامثلة الخاصة بالتكامل وفي نهاية كل محاضرة يوجد نشاط ومهمة

الأهداف السلوكية او نواتج التعلم

بعد الانتهاء من الدرس (المحاضرة) سيكون الطالب قادرا على ان:

- **استخدام الرياضيات في المواضيع العلمية الاخرى**
- **زيادة مقدرته على التفكير المنطقي عند حل التمارين**
- **يميز بين المشتقة والتفاضل والتكامل**
- **كيفية ربط المعطيات مع معلوماته للحصول على حل المسالة**

المتطلبات السابقة

كتاب الرياضيات Thomas Calculus

الأهداف السلوكية او مخرجات التعليم الأساسية		
ت	تفصيل الهدف السلوكي او مخرج التعليم	آلية التقييم
1	معرفة الطالب باسس الرياضيات الاساسية.	• المحاضرات • الواجبات الفردية والمشاركة • حلقات النقاش والاختبارات
2	اكتساب الطالب القدرة على حل مسائل التكامل والتفاضل	البحث وتطوير المهارة من خلال الابحاث وكتب ومصادر الرياضيات
3	القدرة على تطبيق التكامل والتفاضل في المواضيع العلمية	• مشاريع فردية • الاختبارات
4	معرفة الطالب بالدوال المثلثية والدوال الاسية وحل الامثلة عليها	• حل التمارين • الانشطة

أساليب التدريس (حدد مجموعة متنوعة من أساليب التدريس لتناسب احتياجات الطلاب ومحتوى المقرر)

الاسلوب او الطريقة	مبررات الاختيار
١-المحاضرات النظرية من خلال الشرح	محدد وواضح ويطبق بسهوله وهو التقليدي
٢. التعلم التفاعلي والمتبادل	التفاعل بين الطلبة
٣. التعلم القائم على حل المسائل الرياضية حتى لو كان بدون مراجعة سابقة للمادة	اكتساب الطالب مهارة حل المسائل من خلال تعلم اسس ومبادئ الرياضيات
٤. المناقشة في نهاية المحاضرة	تقديم الخلاصة والفهم للموضوع

الفصل الثاني من المحتوى العلمي						
عنوان الفصل	الوقت		٢ ساعة اسبوعيا			
التوزيع الزمني	النظري	العملي	العنوان الفرعي	طريقة التدريس	التقنيات	طرق القياس
الأسبوع الأول	٢	-	مقدمة عن المقرر، أهداف التعلم، محتوى المقرر العناوين الفرعية	محاضرة نظري	عرض تقديمي، شرح، أسئلة وأجوبة، مناقشة	عرض الامثلة والمناقشة وملاحظة مستوى الطلبة
الأسبوع الثاني	٢	-	تطبيقات التفاضل القيم العضمى والصغرى المسافة والسرعة والتعجيل تطبيقات فيزياوية تطبيقات هندسية	محاضرة نظري	**(شرح أسئلة وأجوبة/ مناقشة)**	**عرض الامثلة والمناقشة وملاحظة مستوى الطلبة**
الاسبوع الثالث	٢	-	تطبيقات التفاضل رسم الدوال رسم الدالة المثلثية الدوال العكسية	محاضرة نظري	**(شرح أسئلة وأجوبة/ مناقشة)**	**عرض الامثلة والمناقشة وملاحظة مستوى الطلبة**
الاسبوع الرابع	٢	-	تطبيقات التفاضل الدوال الاسية اللوغارتمية النهايات العظمى النهايات الصغرى نقاط الانقلاب المحاذيات	محاضرة نظري	**(شرح أسئلة وأجوبة/ مناقشة)**	**عرض الامثلة والمناقشة وملاحظة مستوى الطلبة**

الاسبوع الخامس والسادس	٢	-	التكامل	التكامل القوانين وعلاقته بالتفاضل التكامل المحدد التكامل الغير المحدد تطبيقات التكامل	محاضرة نظري	**(شرح أسئلة وأجوبة/ مناقشة)**	**عرض الامثلة والمناقشة وملاحظة مستوى الطلبة**
الاسبوع السابع والثامن	٢	-	التكامل	المساحة تحت المنحنيين المساحة بين المنحنيين المساحة التقريبية الحجوم الدورانية مع الاهتمام بالرسم	محاضرة نظري	**(شرح أسئلة وأجوبة/ مناقشة)**	**عرض الامثلة والمناقشة وملاحظة مستوى الطلبة**
الاسبوع التاسع والعاشر	٢	-	التكامل	ايجاد طول قوس المنحني تطبيقات مختلفة	محاضرة نظري	**(شرح أسئلة وأجوبة/ مناقشة)**	**عرض الامثلة والمناقشة وملاحظة مستوى الطلبة**
الاسبوع الحادي عشر والثاني عشروالثالث عشر	٢	-	التكامل	طرق عامة في التكامل طريقة التعويض طريقة التجزئة طريقة استخدام الكسور الجزئية طريقة استخدام الكسور الاسية	محاضرة نظري	**(شرح أسئلة وأجوبة/ مناقشة)**	**عرض الامثلة والمناقشة وملاحظة مستوى الطلبة**

			طريقة استخدام الكسور اللوغارتمية			
الاسبوع الرابع عشروخامس عشر	٢	-	التفاضل	حل المعادلات التفاضلية	محاضرة نظري	**(شرح أسئلة وأجوبة/ مناقشة)**	**عرض الامثلة والمناقشة وملاحظة مستوى الطلبة**

الوحدة النمطية للاسبوع الاول والثاني والثالث والرابع والخامس والسادس والسابع والثامن

اولا : النظرة الشاملة

أ – الفئة المستهدفة Target population

طلبة المرحلة الاولى – قسم التقنيات الالكترونية المعهد التقني / الدور

ب – مبررات الوحدة

تم تصميم هذه الوحدة لكي يتعرف الطالب على اسس الرياضيات وتطبيقاتها وانواعها

ت – الفكرة المركزية (Central Idea)

اولا : التعرف على المسافة والسرعة والتعجيل،تطبيقات فيزياوية،تطبيقات هندسية،رسم الدوال،رسم الدالة المثلثية

ثانيا : حل المعادلات الدوال الاسية،اللوغارتمية،النهايات العظمى،النهايات الصغرى

نقاط الانقلاب،المحاذيات

ثالثا : حل الامثلة التكامل،القوانين وعلاقته بالتفاضل،التكامل المحدد،التكامل الغير المحدد،تطبيقات التكامل

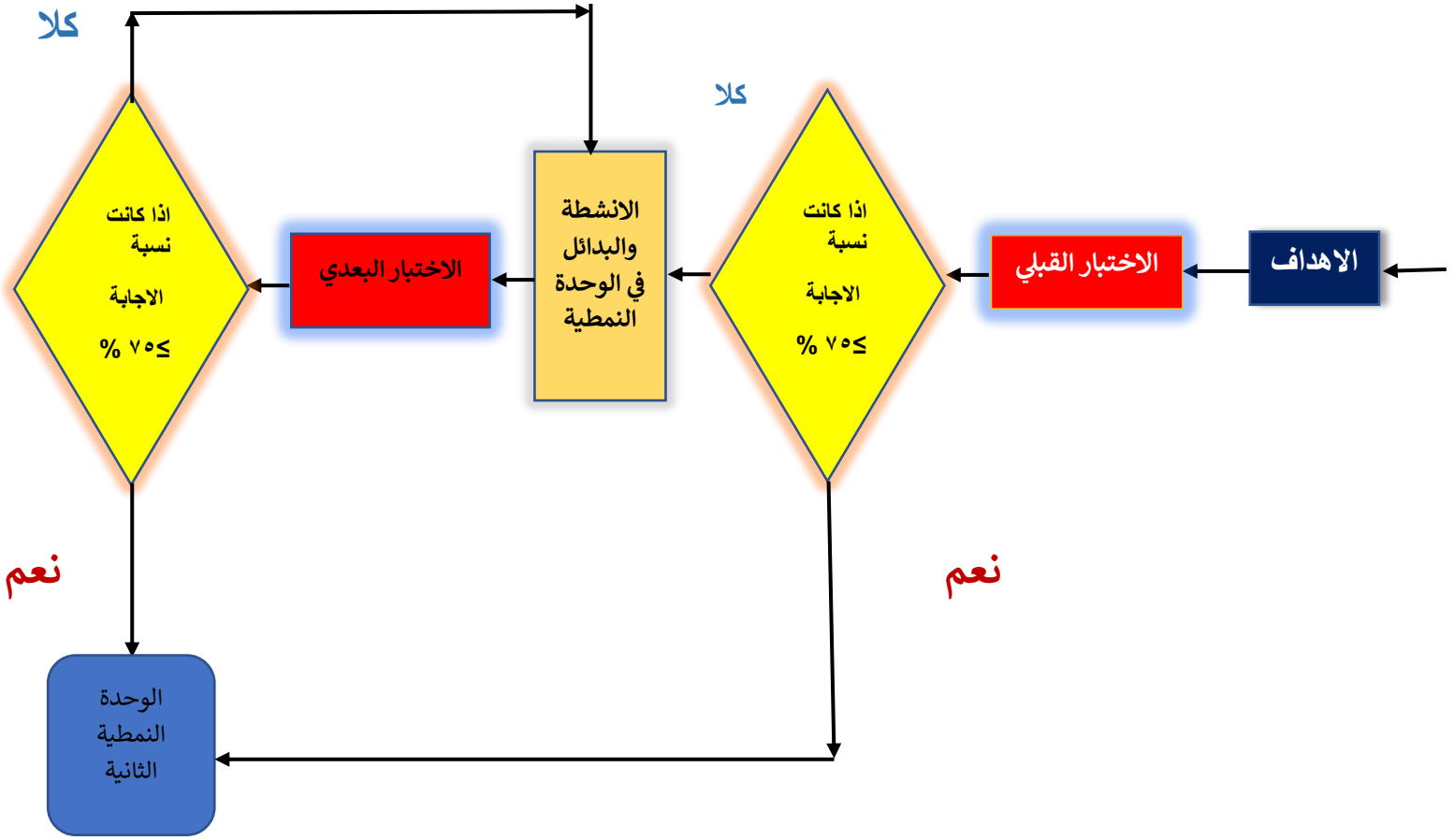
رابعا : حل مسائل المساحة تحت المنحنيين،المساحة بين المنحنيين،المساحة التقريبية،الحجوم الدورانية مع الاهتمام بالرسم

ت – اهداف الوحدة

سيكون الطالب بعد انتهاء المحاضرة قادرا على ان :

١. التعرف على المسافة والسرعة والتعجيل،تطبيقات فيزياوية،تطبيقات هندسية،رسم الدوال،رسم الدالة المثلثية
٢. حل مسائل الرياضية بدقة
٣. حل الامثلة التكامل،القوانين وعلاقته بالتفاضل،التكامل المحدد،التكامل الغير المحدد،تطبيقات التكامل

ج – مخطط انسيابي للتدريب بواسطة الوحدة النمطية



ثانيا : الاختبار القبلي

ضع دائرة حول الاجابة الصحيحة لكل مما ياتي :

١- جد مشتقة الدالة $Y= f(x) = \sqrt{x}$ تم احسب ميل المستقيم المماس للدالة عند النقطة (٤,٢)

a) ٤/١

b) ٤/٣

٢ – جد مشتقة الدالة $y = x^2$

a) X

b) 2x

٣ – جد مشتقة الدالة $y = \sin 2x^2$

a) $4x\cos 2x^2$

b) $4x\cos 2x$

٤ – جد مشتقة الدالة $y = \ln x$

a) $\frac{1}{x}$

b) $\frac{2}{x}$

ملاحظة

يرجى التحقق من سلامة اجابتك بمراجعة صفحة (مفاتيح الاجابات على الاختبارات) في نهاية الوحدة. ففي حالة حصولك على نسبة اجابة ١٠٠ % فتكون غير محتاج لدراسة هذه المحاضرة واذهب لدراسة الوحدة الثانية. اما في حالة حصولك على درجة اقل من ١٠٠% فستكون بحاجة لدراسة هذه الوحدة.

ثالثا : عرض الوحدة النمطية

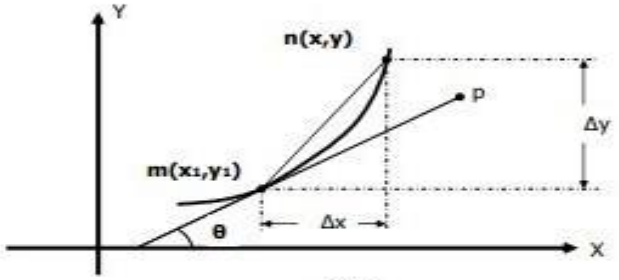
•• DERIVATION الاشتقاق ••

التفسير الهندسي للمشتقة :

ترسم منحني الدال $y = f(x)$ والقاطع mn بين النقطتين $m(x_1, y_1), n(x, y)$ وترسم المماس mp من نقطة m والذي يصنع زاوية θ مع المحور x . ميل القاطع mn هو $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ وميل المماس mp هو $\tan\theta$. فاذا فرضنا ان النقطة n تحركت على المنحني باتجاه m, فان Δx تأخذ بالصغر حتى تقترب من الصفر وان القاطع mn ينطبق تدريجياً على المماس mp, وبالتالي فان ميل القاطع mn سيقترب من ميل المماس mp

$$\therefore \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\theta = \frac{dy}{dx}$$

مشتقة الدالة عند النقطة m



اذن ميل المستقيم المماس للدالة $y = f(x)$ عند النقطة (x,y) هو مشتقة الدالة عند هذه النقطة , ويكتب الرمز الرياضي للمشتقة على الصورة التالية :

$$\therefore f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

مثال : جد مشتقة الدالة $y = f(x) = \sqrt{x}$ ثم احسب ميل المستقيم المماس للدالة عند النقطة (4,2).

الحـل :

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \times \frac{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x) - x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

الصفحة 2

بما ان الميل $\frac{dy}{dx} =$,ولايجاد قيمة الميل نعوض عن x بـ(4) في مشتقة الدالة :

$$m = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

•• الـغــايــــــات Limits ••

يقال أن غايـــة f (x) عندمـــا x تقتـرب مـن x_0 هـــي L وتكتب :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

إذا كانت f (x) تقترب من L , كلما اقتربت x من x_0 دون أن تساويها . اذن :
1) يجب ان تكون الدالة f (x) معرفة على جهتي x_0 , ولا يشترط ان تكون معرفة عند x_0
2) لاحاجة لايجاد قيمة $f(x_0)$ لحساب غاية الدالة عند x_0 لأنه ربما تكون $f(x_0)$ غير معرفة

قوانيـن في الغايـة :

1) $f(x) = C$

$\therefore \lim_{x \to a} f(x) = C$ اذا كانت الدالة تساوي الثابت C :

2) $\lim_{x \to a} k\ f(x) = k \lim_{x \to a} f(x)$ K=constant

3) $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = [\lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)]$

4) $\lim_{x \to a} [f(x) \times g(x)] = [\lim_{x \to a} f(x) \times \lim_{x \to a} g(x)]$

5) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$

6) $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$

7) $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$

امثـــــــــلة :

1) $\lim_{x \to 2} (2x+3) = 2\lim_{x \to 2} x + \lim_{x \to 2} 3 = 2(2)+3 = 7$

2) $\lim_{x \to -2} \frac{x^2-4}{x^2+4} = \frac{4-4}{4+4} = \frac{0}{8} = 0$

3) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+2)}{(x-1)} = \frac{3}{0} = \infty$

بما ان الناتج ∞ اذن **الغاية غير موجودة** not exist

4) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$

$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{1^2-1}{1-1}=\frac{0}{0}$ نعوض عن قيمة x = 1 :

نجـد أن المقدار يساوي($\frac{0}{0}$) وهي قيمة غير معرفة , لذا نقوم بالبحث عن الحل اما بالتحليل الى العوامل الاولية او بالضرب في المرافق , وكما يلي :

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}=x+1=1+1=2$$

5) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}$

$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}=\frac{\sqrt{4+0}-2}{0}=\frac{0}{0}$ (القيمة غير معرفة)

$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}\times\frac{\sqrt{4+x}+2}{\sqrt{4+x}+2}$ نضرب × مرافق البسط

$$\lim_{x\to 0}\frac{4+x-4}{x\left(\sqrt{4+x}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\left(\sqrt{4+x}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{4+x}+2}=\frac{1}{4}$$

6) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}\times\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-x}}=\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{(x-\sqrt{x})(x+\sqrt{x})}}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{(x-\sqrt{x})}}{\sqrt{(x+\sqrt{x})}}=\frac{\sqrt{(1-\sqrt{1})}}{\sqrt{(1+\sqrt{1})}}=\frac{0}{\sqrt{2}}=0$$

7) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-2}{4x^3-1}$ عندما تكون الغاية ∞ نقسم حدود البسط والمقام على x الموجودة بأعلى أس ثم نعوض

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{4-\frac{1}{x^3}}=\frac{0}{4}=0$$ نقسم كل الحدود على x^3

8) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}=\frac{2}{0}=\infty$$

الغاية غير موجودة

•• DERIVATION الاشتـفـاق ••

• رموز الاشتقاق •

رمز المشتقة الأولـى : y' , $\frac{dy}{dx}$, $f'(x)$

رمز المشتقة الثانيـة : y'' , $\frac{d^2y}{dx^2}$, $f''(x)$

رمز المشتقة الثالثـة : y''' , $\frac{d^3y}{dx^3}$, $f'''(x)$ وهكذا

قوانين ايجاد المشتقة لبعض الدوال

1) مشتقة الدالة الثابتة تساوي صفرا : $y=f(x)=c$

حيث ان c قيمة ثابتة : $y'=\frac{dy}{dx}=0$

2) مشتقة الدالة $y=x^n$:

$$y=x^n \quad \Rightarrow \quad y'=n\,x^{n-1}$$

3) مشتقة حاصل ضرب دالتين : $y=u.v$

$y'=u.v'+v.u'$ الاولى×مشتقة الثانية+الثانية×مشتقة الاولى

4) مشتقة حاصل قسمة دالتين : $y=\frac{u}{v}$

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

5)مشتقة مقدار داخل قوس مرفوع الى قوة معينة : $y = f(x)$

$$\frac{d(y)^n}{dx} = n\ y^{n-1}\ \frac{dy}{dx}$$

مشتقة الكل ×مشتقة داخل القوس

امثلة محلولـــــــــة :

1) جد مشتقة الدوال التالية :

1) $y = x^3 \Rightarrow y' = 3x^2$

2) $y = 2\sqrt{x} \Rightarrow y = 2(x)^{\frac{1}{2}}$

$$y' = 2\left(\frac{1}{2}\ x^{\frac{1}{2}-1}\right) = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

3) $y = x^3 - 5x^2 + x - 4 \Rightarrow y' = 3x^2 - 10x + 1 - 0$

$y'' = 6x - 10$ ولايجاد المشتقة الثانية y'' :

$y''' = 6$ ونستمر بالاشتقاق :

2) جد مشتقة المقدار : $y = (x^2 - 2x)^4$

$$\frac{dy}{dx} = 4(x^2 - 2x)^3\,[2x - 2] = 8(x^2 - 2x)^3(x - 1)$$

3) جد مشتقة المقدار : $y = x^2\sqrt{4 - x}$

$$y' = x^2\left[\frac{1}{2}(4 - x)^{-\frac{1}{2}}(-1)\right] + (4 - x)^{\frac{1}{2}}\,[2x]$$

$$y' = \frac{-x^2}{2\sqrt{4 - x}} + 2x\sqrt{4 - x}$$

4) اذا كانت الدالة : $y = f(x) = \frac{2x + 1}{3x + 1}$ جد : $f'(0)\ ,\ f''(1)$

$$f'(x) = \frac{(3x + 1) \times 2 - (2x + 1) \times 3}{(3x + 1)^2} = \frac{6x + 2 - 6x - 3}{(3x + 1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-1}{(3x+1)^2} \quad \Rightarrow \quad f'(0)=-1$$

$$f''(x)=2(3x+1)^{-3}(3) \quad \Rightarrow \quad f''(1)=\frac{6}{64}=\frac{3}{32}$$

مشتقة الدالة الضمنية Implicit Function:

نقول عن هذه الدالة , بان y هي دالة ضمنية الى x : $xy+x-2y=1$

ولايجاد y' نشتق كل حد بالنسبة الى x ونم نستخرج y' :

$$xy'+y(1)+(1)-2y'=0$$

$$y'(x-2)=-y-1 \quad \Rightarrow \quad y'=\frac{-y-1}{x-2}$$

•••قوانين مشتقة الدوال المثلثيه•••

1) مشتقة $\sin a$, حيث ان $a=f(x)$:-

$$y=\sin a$$

$$y'=\cos a \ \frac{da}{dx}$$

2) مشتقة $\cos a$, حيث ان $a=f(x)$:-

$$y=\cos a$$

$$y'=-\sin a \ \frac{da}{dx}$$

3) مشتقة $\tan a$, حيث ان $a=f(x)$:-

$$y=\tan a$$

$$y'=\sec^2 a \ \frac{da}{dx}$$

4) مشتقة $\cot a$, حيث ان $a=f(x)$:-

$$y=\cot a$$

$$y'=-\operatorname{cosec}^2 a \ \frac{da}{dx}$$

5) مشتقة $\sec a$, حيث ان $a=f(x)$:-

$$y=\sec a$$

$$y'=\sec a \ \tan a \ \frac{da}{dx}$$

6) مشتقة $\operatorname{cosec} a$, حيث ان $a=f(x)$:-

$$y=\operatorname{cosec} a$$

$$y'=-\operatorname{cosec} a \ \cot a \ \frac{da}{dx}$$

امثلـــــة محلولـــــــــة:-

1).جد مشتقة الدوال التالية : 1)

$$y=\sin 2x^2$$

$$y' = \cos 2x^2 [4x] = 4x \cos 2x^2$$

2) $y = \cos^{-3} \frac{x}{3}$

$$y' = -3\cos^{-4} \frac{x}{3}\left[-\sin\frac{x}{3}\left(\frac{1}{3}\right)\right] = \cos^{-4}\frac{x}{3}\sin\frac{x}{3}$$

3)

$$y = \sqrt{x}\ \tan\sqrt{x}$$

$$y' = \sqrt{x}\left[\sec^2\sqrt{x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right] + \tan\sqrt{x}\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}\right]$$

$$y' = \frac{1}{2}\left[\sec^2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\tan\sqrt{x}\right]$$

4) $y = \cot(x^2 + x)^2$

$$y' = -\operatorname{cosec}^2(x^2+x)^2\left[2(x^2+x)(2x+1)\right]$$

$$y' = -2(x^2+x)(2x+1)\operatorname{cosec}^2(x^2+x)^2$$

5) $y = \sec^2 \frac{1}{2x}$

$$y' = 2\sec\frac{1}{2x}\left[\sec\frac{1}{2x}\tan\frac{1}{2x}\right]\left[\frac{-1}{2x^2}\right]$$

$$y' = \frac{-1}{x^2}\sec^2\frac{1}{2x}\tan\frac{1}{2x}$$

6) $y = \cot(\omega t + \pi)$ حيث أن ω : constant

$$\frac{dy}{dt} = -\operatorname{cosec}^2(\omega t + \pi)[\omega + 0] = -\omega \operatorname{cosec}^2(\omega t + \pi)$$

2). جد $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ للدالة : $f(x) = 3\operatorname{cosec} x.\cot x$

الحـل :

$$f'(x) = 3\left[\operatorname{cosec} x.\left(-\operatorname{cosec}^2 x\right) + \cot x.\left(-\operatorname{cosec} x.\cot x\right)\right]$$

$$f'(x) = -3\operatorname{cosec}^3 x - 3\operatorname{cosec} x.\cot^2 x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-3\cos ec^3\frac{\pi}{2}-3\cos ec\frac{\pi}{2}.\cot^2\frac{\pi}{2}=-3$$

مشتقة الدالــة اللوغاريتميــة :-

$$y=\ln u \qquad u=f(x)$$

$$y'=\frac{1}{u}.\frac{du}{dx}$$

امثلــة : جد مشتقة مـا يلــي :

1) $y=x\ln(x^2+1)$

$$y'=x.\frac{2x}{x^2+1}+\ln(x^2+1).(1)=\frac{2x^2}{x^2+1}+\ln(x^2+1)$$

2) $y=(\ln\sec x)^2$

$$y'=2(\ln\sec x)\left[\frac{1}{\sec x}.(\sec x\tan x)\right]=2\tan x.\ln\sec x$$

3) $$y=Ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=Ln\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}=Ln(1+x)^{\frac{1}{2}}-Ln(1-x)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}Ln(1+x)-\frac{1}{2}Ln(1-x)=\frac{1}{2}[Ln(1+x)-Ln(1-x)]$$

$$y'=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+x}.1-\frac{1}{1-x}.(-1)\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1-x+1+x}{(1-x^2)}\right)$$

$$y'=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{(1-x^2)}\right]=\frac{1}{(1-x^2)}$$

مثال: جد قيم كل من : $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ، $f''\left(\frac{\pi}{6}\right)$ ، $f'''\left(\frac{\pi}{4}\right)$ للدالة :

$$f(x)=4\cos^2 x-3\ln\sec x$$

$$f'(x)=8\cos x(-\sin x)-3\frac{1}{\sec x}.\sec x.\tan x$$

الحـل:

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-8\cos\frac{\pi}{3}.\sin\frac{\pi}{3}-3\tan\frac{\pi}{3}=-8\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}-3\sqrt{3}=-5\sqrt{3}$$

$$f''(x)=-8\cos x.\cos x+\sin x.(8\sin x)-3\sec^2 x$$

$$f''\left(\frac{\pi}{6}\right)=-8\cos^2\frac{\pi}{6}+8\sin^2\frac{\pi}{6}-3\sec^2\frac{\pi}{6}$$

$$f''\left(\frac{\pi}{6}\right)=-8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+8\left(\frac{1}{2}\right)^2-3\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2=-6+2-4=-8$$

$$f''(x)=-8\cos^2 x+8\sin^2 x-3\sec^2 x=-8(\cos 2x)-3\sec^2 x$$

$$f'''(x)=-8[-\sin 2x(2)]-3[2\sec x(\sec x.\tan x)]$$

$$f'''\left(\frac{\pi}{4}\right)=16\sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right)-6\sec^2\frac{\pi}{4}.\tan\frac{\pi}{4}=16(1)-6\left(\sqrt{2}\right)^2(1)=4$$

مشتقة الدالة الاسية :-

الدالة الاسية هي كل دالة على شكل $y=a^u$ حيث ان $u=f(x)$ وفيها المتغير المستقل x هو أس لمقدار ثابت هو a والمتغير المعتمد هو y .

القانون العام هو : $\frac{dy}{dx}=a^u.\frac{du}{dx}.\ln a$

مثال(1) جد مشتقة ما يلي :

1) $y=5^{x^2+x-1}$

$$y'=5^{x^2+x-1}.[2x+1].\ln 5$$

2) $y=3e^{\tan x} \Rightarrow y'=3e^{\tan x}\sec^2 x.\ln e \Rightarrow y'=\frac{3e^{\tan x}}{\cos^2 x}$

مثال(2) جد مشتقة الدالة : $y=(\sin x)^{\cos x}$

الحل : عندما **لا** يكون الاساس قيمة ثابتة :

1) نأخذ $\ln$ الطرفين: $\ln y=\ln(\sin x)^{\cos x}=\cos x.\ln\sin x$

2) نشتق الطرفين بالنسبة لـ x :

$$\frac{1}{y}.\frac{dy}{dx}=\cos x.\frac{1}{\sin x}(\cos x)+\ln\sin x.(-\sin x)$$

$$\frac{dy}{dx} = (\sin x)^{\cos x}\left(\cot x.\cos x - \sin x.\ln \sin x\right)$$

مشتقة الدالة المركبة (الدالة البارامترية) : Parametric differentiation

في بعض الحالات يكون كل من y , x منغير يعتمد على متغير ثالث مثل u يسمى بـ Parameter كما في الدالتين : $y = f(u)$, $x = g(u)$

ولحساب المشتقة في هذه الحالة فان : $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \frac{dy/du}{dx/du}$

اما المشتقة الثانية فتساوي : $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{du}\left(\frac{dy}{dx}\right) \times \frac{du}{dx}$

ويمكن حساب $\frac{d^2y}{dx^2}$ اذا كانت المشتقة الاولى بالنسبة الى متغيرين او اكثر كالتالي :

$$\frac{dy}{dx} = f(x,t) \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial y}{\partial x}.\frac{dx}{dx} + \frac{\partial y}{\partial t}.\frac{dt}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x,t,u) \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial y}{\partial x}.\frac{dx}{dx} + \frac{\partial y}{\partial t}.\frac{dt}{dx} + \frac{\partial y}{\partial u}.\frac{du}{dx}$$

مثال 1: جد $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ اذا كانت : $y = 1 + u^2$, $x = 2 + u$

الحل : أولا نجد مشتقة y بالنسبة الى u :

$$\frac{dy}{du} = 2u$$

ومشتقة x بالنسبة الى u :

$$\frac{dx}{du} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/du}{dx/du} = \frac{2u}{1} = 2u \Rightarrow \therefore \frac{dy}{dx} = 2(x-2) = 2x - 4$$

لا يجاد $\frac{d^2y}{dx^2}$ نشتق $\frac{dy}{dx}$ بالنسبة الى u :

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{du}\left(\frac{dy}{dx}\right)\times\frac{du}{dx}=2\times 1=2$$

مثال 2: جد $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ اذا كانت : $x=2\sin t$, $y=\cos 2t$

الحل :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{-2\sin 2t}{2\cos t}$$

ولكن : $\sin 2t=2\sin t\cos t$,

$$\frac{dy}{dx}=-2\sin t=-2\sin\left(\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\times\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}(-2\sin t)\times\frac{1}{2\cos t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-2\cos t\times\frac{1}{2\cos t}=-1$$

مثال 3: جد مشتقة الدالة البارا مترية $\frac{dy}{dx}$ من الدالتين :

$$x=t^2+e^t \quad , \quad y=\sin t+t$$

الحل:

$$\frac{dx}{dt}=2t+e^t \quad , \quad \frac{dy}{dt}=\cos t+1$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}+\frac{dx}{dt}=\frac{\cos t+1}{2t+e^t}$$

تمارين :

1) جد $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ للدوال البارا مترية التالية :

$$x=2t \quad , \quad y=(1+t)^2$$

$$x=3\cos^2\theta \quad , \quad y=2\sin^2\theta$$

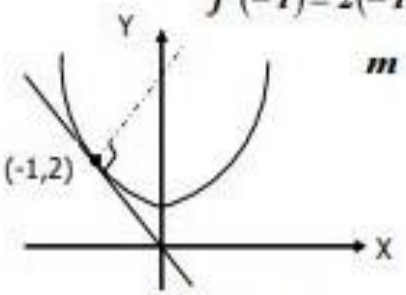
$$x=4(1+\cos\theta) \quad , \quad y=3(\theta-\sin\theta)$$

تمارين في حساب المماس والعمود للدالة

1) جد ميل المماس للمنحني $y = x^2 + 1$ عند النقطة (-1,2) ثم جد معادلة المماس والعمود على المنحني في تلك النقطة .

الحل : $y = f(x) = x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x$

ميل المماس للمنحني عند النقطة (-1,2) : $f'(-1) = 2(-1) = -2$



معادلة المستقيم بدلالة الميل هي : $m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$

اذن : $y_1 = 2 \ , \ x_1 = -1$

$$-2 = \frac{y-2}{x-(-1)}$$

معادلة مماس الدالة : $y - 2 = -2x - 2 \quad \Rightarrow \quad y + 2x = 0$

ميل العمود على المماس $\overline{m}$ هو المقلوب السالب لميل مماس الدالة : $\overline{m} = -\dfrac{1}{-2} = \dfrac{1}{2}$

معادلة العمود : $\dfrac{1}{2} = \dfrac{y-2}{x-(-1)} \quad \Rightarrow \quad 2y - x - 5 = 0$

2) جد النقطة على المنحني $y = x^2 - 6x + 8$ التي يكون المماس فيها افقياً .

الحل : بما ان المماس افقياً , اذن ميله يساوي صفر

اذن نشتق معادلة المنحني ونساويها بالصفر : $y' = 2x - 6 \quad \Rightarrow \quad 0 = 2x - 6$

نجد قيمة x : $\therefore \quad 2x = 6 \quad \Rightarrow \quad x = 3$

الان نجد y من الدالة الاصلية : $y = 3^2 - 6(3) + 8 = -1$, اذن النقطة هي : **(3,-1)**

3) جد النقطة على المنحني : $y = f(x) = 2\sqrt{x}$ والتي يكون المماس فيها موازيا للمستقيم : $x - 3y + 5 = 0$

الحل : <u>ملاحظة</u> : تكون المستقيمات متوازية إذا تساوى ميلها : $m_1 = m_2$

نجد ميل المستقيم من معادلته وذلك بقسمة (سالب معامل **x**) على (معامل **y**) :

$$\therefore \ m = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \ m = \frac{1}{3} = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x} = 3 \quad \Rightarrow \quad \therefore \ x = 9$$

نجد قيمة y من الدالة الأصلية : $f(9)=2\sqrt{9}=6$ ∴ النقطة هي $P(9,6)$

4) جد ميل المنحنى $y=f(x)=\cos 3x$ عند النقطة $x=\frac{\pi}{3}$ ثم اوجد معادلة المماس عند النقطة نفسها .

الحل : نشتق المعادلة لايجاد الميل

$$f'(x)=-3\sin 3x \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-3\sin 3\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$$

نجد y من الدالة الاصلية :

$$y=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos 3\left(\frac{\pi}{3}\right)=-1$$

الان نجد معادلة المماس :

$$m=\frac{y-y_1}{x-x_1} \Rightarrow 0=\frac{y-(-1)}{x-\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \therefore y=-1$$

5) جد النقاط على المنحنى $y=2\sin x\cos x-\cos 2x$ والتي يكون المماس للمنحنى عندها موازيا للمحور x ضمن الفترة $0\le x\le 2\pi$

الحل:

المماس موازي للمحور x اي ميله يساوي صفر

$$y'=2[\sin x(-\sin x)+\cos x.\cos x]-(-\sin 2x)(2)$$

$$y'=2[-\sin^2 x+\cos^2 x]+2\sin 2x=2\cos 2x+2\sin 2x=0$$

نقسم على $\cos 2x$:

$$\therefore 2\sin 2x=-2\cos 2x \Rightarrow \therefore \tan 2x=-1$$

ظل الزاوية سالب في الربع الثاني والرابع:

$$\therefore either \quad 2x=180-45=135\times\frac{\pi}{180}=\frac{3\pi}{4} \qquad \therefore x=\frac{3\pi}{8}$$

$$\therefore or \quad 2x=360-45=315\times\frac{\pi}{180}=\frac{7\pi}{4} \qquad \therefore x=\frac{7\pi}{8}$$

$$\frac{3\pi}{8}=67.5^\circ \quad , \quad \frac{7\pi}{8}=157.5^\circ$$

نجد y من الدالة الاصلية:

$$y=f(67.5^\circ)=2\sin 67.5\,.\cos 67.5-\cos 2(67.5)=1.414$$
$$y=f(157.5^\circ)=2\sin 157.5\,.\cos 157.5-\cos 2(157.5)=-1.414$$

اذن النقاط هـــي : $(3\pi/8\ ,1.414)\ ,\ (7\pi/8\ ,-1.414)$

تمارين في حساب الغاية

عندما تكون غاية الدالة الكسرية بعد التعويض $\frac{0}{0}$ يمكن حلها عند طريق المشتقة بان نشتق كل حد من حدود البسط والمقام ثم نعوض قيمة الغاية في الدالة ونستمر في الاشتقاق والتعويض الى ان نحصل على قيمة حقيقية من ناتج التعويض .

أمثلة محلولة :

1) . حد الغاية للمقادير التالية :

$$1)\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$$

الحل :

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}=\frac{1-1+0}{e-e}=\frac{0}{0}$$

نشتق البسط والمقام ونعوض :

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x+\frac{1}{x}}{e^x}=\frac{2+1}{e}=\frac{3}{e}$$

$$2)\quad \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{0-0}{0}=\frac{0}{0}$$

نشتق البسط والمقام :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$$

الان نشتق البسط والمقام مرة ثانية ثم نعوض:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{0}{0}$$

نجد المشتقة الثانية للبسط والمقام ثم نعوض:

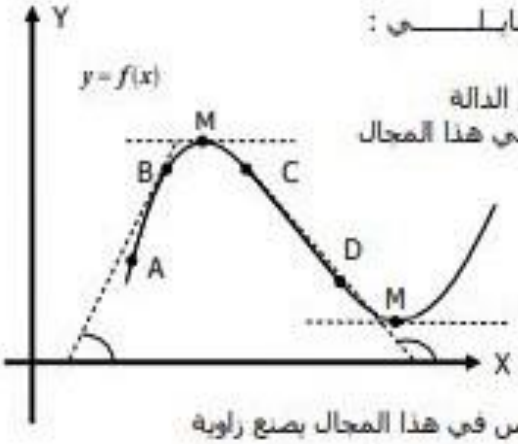
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}$$

$$3)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\cot x}{\cot 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\tan x}}{\frac{1}{\tan 2x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\tan x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 2x}{\sec^2 x}=\frac{2(1)}{1}=2$$

••تطبيقـــات التفاضـــل••

فـــي الدالـة : $y=f(x)$. نلاحـظ مايلـــــي :



من النقطة (**A**) إلى النقطة (**B**), ميل الدالة (المشتقة) تكون موجبة لأن المماس في هذا المجال يصنع زاوية حادة مع المحور x , أي ان الدالة تكون متزايدة : $f'(x)>0$

2. من النقطة(**C**) الى النقطة (**D**)الدالة في حالة تناقص (هبوط)

وميل الدالة (المشتقة) سالب لان المماس في هذا المجال يصنع زاوية منفرجة مع المحور x : $f'(x)<0$

3 . النقطتين M_1 و M_2 هي النقاط المتطرفة للدالة وتسمى نقاط الدوران **Turning points** (نقاط النهايات العظمى والصغرى) ويكون المماس للمنحني عندهما افقياً وموازياً للمحور x **(أي ميله = صفر)** ونحصل عليهما من مساواة المشتقة الاولى للدالة بالصفر , أي : $\frac{dy}{dx}=0$

•طريقة إيجاد نقاط الدوران (النهايات العظمى والصغرى)للدالة •

نجد اولاً المشتقة الاولى $f'(x)$ للدالة ونساويها بالصفر ثم نجد منها قيم x ونعوضها في المشتقة الثانية للدالة $f''(x)$, فاذا كانت اشارة المشتقة الثانية بعد التعويض :

1) اشارة موجبة $f''(x)>0$ فالنقطة نهاية صغرى

2)اشارة سالبة $f''(x)<0$ فالنقطة نهاية عظمى

3)اما اذا كانت قيمة المشتقة الثانية بعد التعويض تساوي صفر , نستخدم الطريقة التالية لتحديد نوع النهاية:

نأخذ قيم x التي تجعل المشتقة الاولى تساوي صفر , ونأخذ لها قيم اصغر واكبر منها بقليل ونعوضها في المشتقة الاولى $f'(x)$, فاذا غيرت المشتقة الاولى اشارتها بعد التعويض :-

أ) من **الموجب** الى **السالب** فان قيمة x تلك تمثل **النهاية العظمى** للدالة .

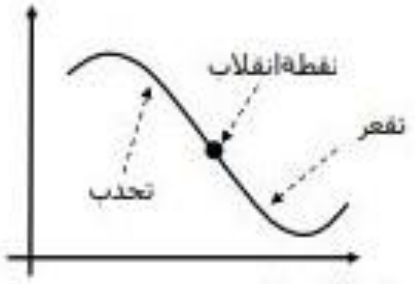
ب)من **السالب** الى **الموجب** فان قيمة x تلك تمثل **النهاية الصغرى** للدالة .
ج)اذا **لم تتغير اشارة المشتقة الاولى** بعد التعويض فالنقطة لا هي نهاية عظمى ولا صغرى

•• نقطـة انقلاب الدالـــة (التحـــــول) ••

وهي النقاط التي تكون عندهاالمشتقة الثانية للدالة تساوي صفرا $f''(x)=0$, وبتحول فيها منحني الدالة من التقعر concave down (وفيها تكون المشتقة الثانية للدالة موجبة $f''(x)>0$)الى التحدب concave up وفيها المشتقة الثانية سالبة $f''(x)<0$.

لإيجـاد نقطـة انقلاب الدالـــة نتبـع ما يلـــي :

1. نجد المشتقة الثانية ونجعلها تساوي صفرا ($f''(x)=0$) فنجد قيمة **x** .
2 . نأخذ قيمة اصغر ثم اكبر من **x** ونعوضها في المشتقة الثانية (**y** ") ونلاحظ اشارة المشتقة الثانية فإذا تغيرت من **الموجب** إلى **السالب** أو **بالعكس** فإن النقطة هي **نقطة انقلاب** .
3 . نجد قيمة **y** من الدالة الأصلية .



مثـال : جد نقطة انقلاب الدالة : $y=f(x)=x^3+1$

الحـل : $y'=f'(x)=3x^2 \Rightarrow y''=6x=0 \Rightarrow x=0$

نأخذ x = −1 $\quad y''=f''(-1)=-6$

نأخذ x = 1 $\quad y''=f''(1)=6$

بما أن المشتقة الثانية غيرت إشارتها فان النقطة **x=0** هي **نقطة انقلاب**
نجد قيمة **y** من الداله الاصليه

$y=f(0)=0+1=1$ ∴ نقطة الانقلاب هي : (0 , 1)

••تمـاريـــن محـلـولـــــة••

(1) : جد نقاط الدوران (نقاط النهايات العظمى والصغرى) ونقاط الانقلاب إن وجدت للداله: $y=f(x)=x^2-4x+3$ مع الرسم

الحـل : لرسم الدالة نتبع الطريقة التالية :
1 . إيجاد نقاط التقاطع مع المحورين **x** و **y** .
2 . إيجاد نقاط الدوران وفترات التزايد والتناقص عن طريق $f'(x)$.
3 . إيجاد نقاط الانقلاب وفترات التحدب والتقعر عن طريق $f''(x)$.

1 . نجد نقاط التقاطع مع المحورين :

نقطة التقاطع مع المحور **x** هـــي : $y=x^2-4x+3=0$

$(x-3)(x-1)=0 \Rightarrow x=3 \ , \ x=1$

نقاط التقاطع مع المحور **y** هـي : $y=f(0)=0^2-4(0)+3=3$

نقاط التقاطع مع المحورين هـي : **(0,3)** , **(1,0)** , **(3,0)**

2. نقاط الدوران (النهايات) : $y'=f'(x)=2x-4=0 \quad \Rightarrow \quad x=2$

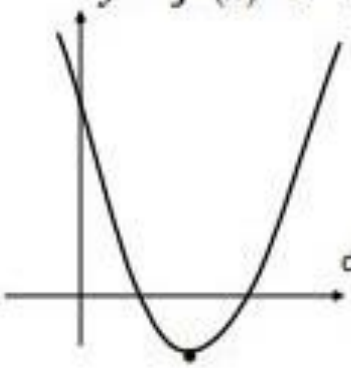
نختبر قيمة **x** في المشتقة الثانية : $y''=f''(x)=2>0$ **نهاية صغرى**

نجد قيمة **y** من الدالة الاصلية : $y=f(2)=2^2-4(2)+3=-1$

اذن النقطة **(2,-1) نقطة نهاية صغرى** .

3. نقاط الانقلاب : المشتقة الثانية تساوي قيمة ثابتة $y''=f''(x)=2$

اذن لايوجد نقاط انقلاب .



x	-1	0	1	2	3	4
y	8	3	0	-1	0	3

فترات التزايـد : $\{x : x>2\}$

فترات التناقص : $\{x : x<2\}$

منطلق الدالة: domain $\{x : x \in R\}=(-\infty,\infty)$

مدى الدالـة : range $\{y : y \geq -1\}=[-1,\infty)$

(2) جد النقاط المتطرفة (النهايات العظمى والصغرى) وفترات التزايد والتناقص , ثم جد نقاط الانقلاب (ان وجدت) للدالة التالية مع الرسم : $y=f(x)=(x-2)(x^2-x-2)$

الحـل :

1)نجد نقاط التقاطع : مع المحور **x** بان نجعل $y=0$:

$y=(x-2)(x^2-x-2)=0 \quad \Rightarrow \quad 0=(x-2)(x-2)(x+1) \quad \Rightarrow \quad x=2\ ,\ x=-1$

مع المحور **y** بان نجعل $x=0$:

$y=f(0)=(0-2)(0^2-0-2)=4$

اذن نقاط التقاطع مع المحورين هي : **(0,4)** , **(2,0)** , **(-1,0)**

2) نجد نقاط الدوران (النهايات العظمى والصغرى) بان نشتق الدالة ونساويها بالصفر :

$y'=f'(x)=(x-2)[2x-1]+(x^2-x-2)[1]=3x^2-6x=0$

$3x(x-2)=0 \quad \Rightarrow \quad x=0 \quad , \quad x=2$

نختبر النهايات في المشتقة الثانية : $f''(x)=6x-6$

نهاية عظمى $f''(0)=6(0)-6=-6<0$

نهاية صغرى $f''(2)=6(2)-6=6>0$

نجد قيم y من الدالة الاصلية : $y=f(0)=(0-2)(0^2-0-2)=4$

$y=f(2)=(2-2)(2^2-2-2)=0$

اذن النقطة **(0,4)** نهاية عظمى , والنقطة **(2,0)** نهاية صغرى

3) نجد نقاط الانقلاب بان نجد المشتقة الثانية ونساويها بالصفر :

$$y'' = 6x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

نختبر النقطة **x=1** بان نأخذ قيم لـ **x** اصغر واكبر من **(1)** ونعوضها في المشتقة الثانية :

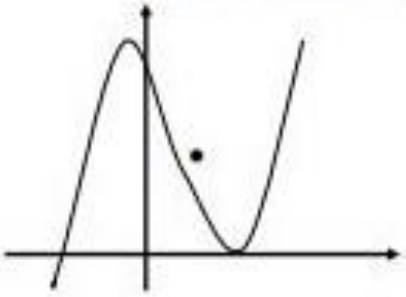
نأخذ x=0 : $f''(0) = 6(0) - 6 = -6$

نأخذ x=2 : $f''(2) = 6(2) - 6 = 6$

بما ان المشتقة الثانية غيرت اشارتها , اذن النقطة نقطة انقلاب , نجد **y** من الدالة الاصلية:

$$y = f(1) = (1-2)(1-1-2) = 2$$

اذن النقطة **(1,2)** نقطة انقلاب . الان نرتب النقاط على شكل جدول :



X	-1	0	1	2	3	4
y	0	4	2	0	4	20

فترات التزايد : $\{x : x<0\} \cup \{x : x>2\}$

فترات التناقص : $\{x : 0<x<2\} = (0,2)$

منطلق الدالة : $\{x : x \in R\} = (-\infty, \infty)$

مدى الدالة : $\{y : y \in R\} = (-\infty, \infty)$

---

(3) . ارسم منحنى الدالة $y = f(x) = \frac{1}{x-2}$

الحـــل : **عندما تكون الدالة كسرية** , نجد المحاور المحاذية للدالة (العمودية و الافقية)

لا يجاد المحاذيات العمودية , نكتب الدالة **y** بدلالة **x** ثم **نجعل المقام =صفر**

$$y = f(x) = \frac{1}{x-2} \quad \Rightarrow \quad x-2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

اذن المحور العمودي المحاذي للدالة هو المستقيم $x = 2$

ولإيجاد المحاذيات الافقية , نكتب الدالة **x** بدلالة **y** ثم **نجعل المقام =صفر**

$$y = \frac{1}{x-2} \quad \Rightarrow \quad xy - 2y = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2y+1}{y} \quad \Rightarrow \quad y = 0$$

اذن المحور الافقي المحاذي للدالة هو المحـــور **x** , **(y=0)**

نقاط التقاطع مع المحورين :

مع المحور x , **y=0** , لايوجد نقاط تقاطع مع المحور x $\quad 0 = \frac{1}{x-2}$

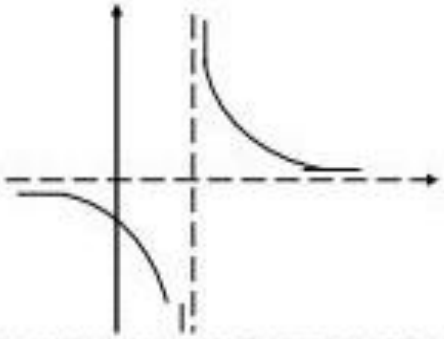
مع المحور y , **x=0** , النقطة $\left(0, \frac{-1}{2}\right)$. $\quad y = f(0) = \frac{1}{0-2} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-1}{2}$

نقاط الدوران :
$$y' = f'(x) = \frac{(x-2)[0]-(1)[1]}{(x-2)^2} = \frac{-1}{(x-2)^2} = 0$$

اذن لاتوجد نهايات عظمى ولا صغرى

نقاط الانقلاب :
$$y'' = f''(x) = \frac{(x-2)^2[0]-(-1)[2(x-2)(1)]}{(x-2)^4} = \frac{2}{(x-2)^3} = 0$$

اذن لا توجد نقاط انقلاب .



x	-4	-2	0	1	3	4
y	$\frac{-1}{4}$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{-1}{2}$	-1	1	$\frac{1}{2}$

منطلق الدالة : $\{x \in R : x \neq 2\}$

مدى الدالة : $\{y \in R : y \neq 0\}$

---

(4) : جد نقاط الدوران (النهايات العظمى والصغرى) ونقاط الانقلاب إن وجدت للدالة:

$$y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 6$$

الحـــل: لايجاد نقاط النهايات **نشتق** الدالة **ونساويها بالصفر** :

$$y' = f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad (3x-3)(x-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

نختبر **x=1** في المشتقة الثانية :
$$y'' = f''(x) = 6x - 6 = 6(1) - 6 = 0$$

بما ان المشتقة الثانية **تساوى صفر** , نأخذ قيم **اصغر واكبر من x=1** ونعوضها في المشتقة الاولى لتحديد نوع النهاية:

نأخذ **x=0** :
$$y' = f'(0) = 3(0)^2 - 6(0) + 3 = 3$$

نأخذ **x=2** :
$$y' = f'(2) = 3(2)^2 - 6(2) + 3 = 3$$

بما ان اشارة المشتقة الاولى لم تتغير بعد التعويض : **اذن لاتوجدنهايات عظمى ولاصغرى للدالة**

لا يجاد نقطة الانقلاب نجد المشتقة الثانية ونساويها بالصفر :

$$y'' = 6x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

نختبر النقطة **x=1** :

نأخذ **x=0** $\leftarrow$ $y'' = 6(0) - 6 = -6$

نأخذ **x=2** $\leftarrow$ $y'' = 6(2) - 6 = +6$

اذن النقطة عند **x=1** نقطة انقلاب , نجد **y** من الدالة الاصلية :

$$y = f(1) = (1)^3 - 3(1)^2 + 3(1) - 6 = -5$$

اذن نقطة الانقلاب هي : (1,-5)

---

(5). جد نقاط الدوران (النهايات العظمى والصغرى) ونقاط الانقلاب للدالة التالية وذلك ضمن الفترة $0 \leq x \leq 2\pi$:

$$y = \sin x + \cos x$$

الحـل: نجد المشتقة الاولى ونساويها بالصفر :

$$y' = \cos x + (-\sin x) = \cos x - \sin x = 0$$

نقسم على $\cos x$: $\sin x = \cos x \quad \Rightarrow \quad \therefore \tan x = 1$

الظل موجب في الربع الاول والثالث :

$$\therefore x = 45 = 45 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4} \quad , \quad or \quad x = 180 + 45 = 225 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{4}$$

نختبر قيم x في المشتقة الثانية : $y'' = -\sin x - \cos x$

نهاية عظمى : $y'' = -\sin 45 - \cos 45 = -\sqrt{2}$

نهاية صغرى : $y'' = -\sin 225 - \cos 225 = \sqrt{2}$

نجد y من الدالة الاصلية :

$$y = \sin 45 + \cos 45 = \sqrt{2}$$

$$y = \sin 225 + \cos 225 = -\sqrt{2}$$

اذن النهاية العظمى هي : $(\pi/4 \ , \sqrt{2})$, والصغرى هي : $(5\pi/4 \ , -\sqrt{2})$

من المشتقة الثانية نجد نقاط الانقلاب : $y'' = -\sin x - \cos x = 0$

نقسم على $\cos x$: $\therefore \sin = -\cos x \quad \Rightarrow \quad \tan x = -1$

الظل سالب في الربع الثاني والرابع : $\therefore \quad x = 180 - 45 = 135 \times \frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{4}$

$$or \quad x = 360 - 45 = 315 \times \frac{\pi}{180} = \frac{7\pi}{4}$$

نجد y من الدالة الاصلية :

$$y = \sin 135 + \cos 135 = 0$$

$$y = \sin 315 + \cos 315 = 0$$

نقاط الانقلاب هـي: $(3\pi/4 \ , 0) \quad , \quad (7\pi/4 \ , 0)$

(6). اذا كان لمنحني الدالة $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ نقطة نهاية صغرى عند **x=2** ونقطة انقلاب عند **x=1** جد قيمة **a , b** .

الحـل : للدالة **نهاية صغرى** عند **x=2** , اذن نشتق الدالة ونساويها بالصفر :

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \quad \Rightarrow \quad f'(2) = 3(2)^2 + 2a(2) + b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -12 - 4a$$

ونقطة **انقلاب** عند **x=1** , اذن نجد المشتقة الثانية ونساويها **بالصفر** :

$$f''(x) = 6x + 2a \quad \Rightarrow \quad f''(1) = 6(1) + 2a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -3$$

$$\therefore \ b = -12 - 4(-3) = 0$$

رابعا : الاختبار البعدي

ضع دائرة حول الاجابة الصحيحة لكل مما ياتي :

١ – جد المشتقة $y = 4x^{-4}$

(a $-8x^{-5}$
(b $8x^{5}$

٢ – جد المشتقة للدالة المثلثية $y = \cos x$

(a $-\sin x$
(b Sin x

مفاتيح الاجابة على الاختبارات

الاختبار القبلي		الاختبار البعدي	
رقم السؤال	الاجابة الصحيحة	رقم السؤال	الاجابة الصحيحة
١	A	١	A
٢	B	٢	B
٣	A		
٤	A		

الوحدة النمطية للاسبوع التاسع والعاشر والحادي عشر والثاني عشر والثالث عشر والرابع عشر والخامس عشر

اولا : النظرة الشاملة

أ – الفئة المستهدفة (Target Population)

طلبة المرحلة الاولى – قسم تقنيات الالكترونية المعهد التقني / الدور

ب – مبررات الوحدة

تم تصميم هذه الوحدة لكي يتعرف الطالب على ايجاد طول قوس المنحني،تطبيقات مختلفة،طرق عامة في التكامل،طريقة التعويض،طريقة التجزئة،طريقة استخدام الكسور الجزئية،طريقة استخدام الكسور الاسية، طريقة استخدام الكسور اللوغارتمية،حل المعادلات التفاضلية.

ت – الفكرة المركزية (Central Idea)

اولا : التعرف على ايجاد طول قوس المنحني،تطبيقات مختلفة،طرق عامة في التكامل

ثانيا : حل المعادلات طريقة التعويض،طريقة التجزئة

ثالثا : حل الامثلة طريقة استخدام الكسور الجزئية،طريقة استخدام الكسور الاسية

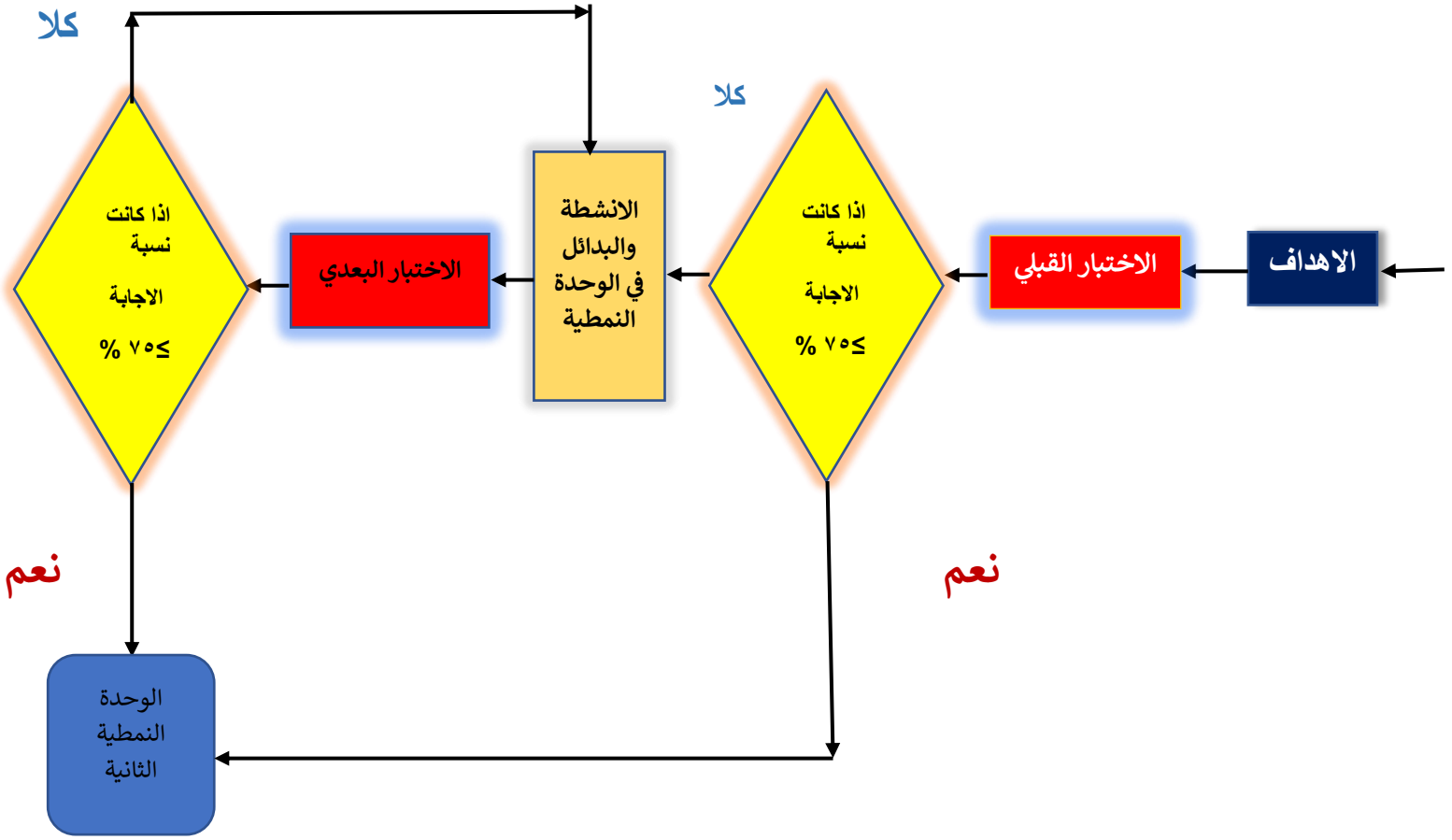
رابعا : حل مسائل طريقة استخدام الكسور اللوغارتمية،حل المعادلات التفاضلية

ث – اهداف الوحدة

سيكون الطالب بعد انتهاء المحاضرة قادرا على ان :

١. التعرف على ايجاد طول قوس المنحني،تطبيقات مختلفة،طرق عامة في التكامل
٢. حل المعادلات طريقة التعويض،طريقة التجزئة
٣. حل الامثلة طريقة استخدام الكسور الجزئية،طريقة استخدام الكسور الاسية
٤. حل مسائل طريقة استخدام الكسور اللوغارتمية،حل المعادلات التفاضلية

ج – مخطط انسيابي للتدريب بواسطة الوحدة النمطية



ثانيا : الاختبار القبلي

ضع دائرة حول الاجابة الصحيحة لكل مما ياتي :

١ – جد ناتج التكامل $\int 3x\ dx$

(a $\frac{3x2}{2}$

(b $2x^2$

٢ – جد التكامل للدالة التالية $\int 2dx$

(a X + c

(b 2x + c

٣ – جد تكامل $\int 3 + 2 + 1$

(a X+ x + x + c

(b 3x + 2x + x + c

ملاحظة

يرجى التحقق من سلامة اجابتك بمراجعة صفحة (مفاتيح الاجابات على الاختبارات) في نهاية الوحدة. ففي حالة حصولك على نسبة اجابة ١٠٠ % فتكون غير محتاج لدراسة هذه المحاضرة واذهب لدراسة الوحدة الثانية. اما في حالة حصولك على درجة اقل من ١٠٠% فستكون بحاجة لدراسة هذه الوحدة.

(7). اذا كانت النقطة **(2,1)** هي نهاية صغرى للدالة : $f(x)=a+(x-b)^2$ فجد قيمة كل من **a , b** .

الحـــل: بما ان النقطة **(2,1)** نهاية صغرى للدالة , فهي تنتمي لمجال الدالة وتحقق المعادلة :

$$f(x)=a+(x-b)^2=a+x^2-2xb+b^2$$

$$1=f(2)=a+(2)^2-2(2)b+b^2 \quad \Rightarrow \quad a=-b^2+4b-3$$

عند نقطة **النهاية الصغرى** , المشتقة الاولى للدالة **تساوي صفر :**

$$f'(x)=2x-2b=0 \quad \Rightarrow \quad f'(2)=2(2)-2b=0 \quad \Rightarrow \quad \therefore b=2$$

$$\therefore \quad a=-(2)^2+4(2)-3=1$$

---

(8) جد قيمة **(a)** حتى تكون للدالة : $f(x)=a\ \sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$ قيمة متطرفة في النقطة $x=\frac{\pi}{3}$ وهل هي عظمى أم صغرى ؟

الحـــل : نجد المشتقة الأولى ونجعلها تساوي صفر :

$$f'(x)=a\cos x+\frac{1}{3}\cos 3x(3)=a\cos x+\cos 3x=0$$

$$a\cos\frac{\pi}{3}+\cos 3\frac{\pi}{3}=a\cos\frac{\pi}{3}+\cos\pi=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{2}-1=0 \quad \Rightarrow \quad a=2$$

نختبر النقطة $x=\frac{\pi}{3}$ في المشتقة الثانية بعد تعويض قيمة a :

$$f''(x)=-2\ \sin x-3\sin 3x=-2\sin\frac{\pi}{3}-3\sin(3)\frac{\pi}{3}=-2\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}\ <0$$

اذن النقطة عند $x=\frac{\pi}{3}$ نهاية عظمى , الان نجد قيمة **y** من الدالة الاصلية :

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{3}\sin 3\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\frac{\sqrt{3}}{2}+0=\sqrt{3}$$, اذن النقطة $\left(\frac{\pi}{3}\ ,\sqrt{3}\right)$

التـــكـامـــــل Integration

•• التـكامـــل الغيـــر مـحـــدد ••

التكامل هو عملية معكوسة لعملية التفاضل ,بمعنى آخر ايجاد الدالة الاصلية اذا اعطيت مشتقتها , ويعرف كذلك بانه ايجاد الحل للمعادلة التفاضلية ,ويسمى هذا النوع من التكامل بالتكامل غير المحدد **Indefinite Integral** ويرمز له بالعلامة $\int$. اذن يمكننا القول :

$\int$ الدالة الاصلية = مشتقة الدالة

$$\int f'(x)dx = f(x) + C$$

C : هو ثابت التكامل , الذي بواسطته يمكننا تحديد موقع منحني الدالة الاصلية على الاحداثيات بالضبط .

ملاحظـة : مشتقة الدالة تكون بالنسبة لمتغير ثان , وهو المتغير المستقل عادة :

فمشتقة الدالة y بالنسبة الى x هـي : $\frac{dy}{dx}$. اما **تفاضل اية دالة** او متغير فلا يحتاج الى متغير ثان لا يجاده , فمثلا : تفاضل y هـو dy , وتفاضل y^2 هـو $2\,y\,dy$.

جدول التكامـــل الاساسي

1. $\int d\,x = x + C$
2. $\int a f(x) d\,x = a \int f(x) dx$ a ثابت
3. $\int a\,x^n d\,x = \frac{a\,x^{n+1}}{n+1} + C$ n≠ -1
4. $\int [f(x) \pm g(x)] d\,x = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$
5. $\int \frac{dx}{x} = ln|x| + C$ x≠0
6. $\int e^{a\,x}\,dx = \frac{1}{a} e^{a\,x} + C$
7. $\int c^{a\,x} dx = \frac{c^{a\,x}}{a\,lnc} + C$ c : ثابت
8. $\int sin ax\,dx = \frac{-1}{a} cos ax + C$
9. $\int cos ax\,dx = \frac{1}{a} sin ax + C$
10. $\int \frac{dx}{cos^2 ax} = \frac{1}{a} tan ax + C$

11. $\int \frac{dx}{\sin^2 ax} = \frac{-1}{a}\cot ax + C$

12. $\int \tan ax\,dx = \frac{-1}{a} ln|\cos ax| + C$

13. $\int \cot ax\,dx = \frac{1}{a} ln|\sin ax| + C$

14. $\int \sec^2 ax\,dx = \frac{1}{a}\tan ax + C$

15. $\int \operatorname{cosec}^2 ax\,dx = \frac{-1}{a}\cot ax + C$

16. $\int \sec ax\,dx = \frac{1}{a} ln|(\sec ax + \tan ax)| + C$

17. $\int \operatorname{cosec} ax\,dx = \frac{-1}{a} ln|(\operatorname{cosec} ax + \cot ax)| + C$

18. $\int \sin^2 a\,x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2a\,x}{4a} + C$ a= ثابت

19. $\int \cos^2 a\,x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2a\,x}{4a} + C$ a= ثابت

20. $\int \sin^n x \cos x\,dx = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1} + C$

21. $\int \cos^n x \sin x\,dx = \frac{-\cos^{n+1} x}{n+1} + C$

تمارين محلولة

1. جد ناتج التكامل :

$$\int (x + \frac{1}{x})^2 dx = \int (x^2 + 2 + \frac{1}{x^2})dx = \frac{x^3}{3} + 2x - \frac{1}{x} + C$$

2 . جد ناتج التكامل : $\int \frac{x^2+5x-1}{\sqrt{x}} \cdot dx$

الحـــــل : نقسم كل حد من حدود البسط على المقام فنحصل على :

$$\int \left(x^{\frac{3}{2}} + 5x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} \right) dx = \int x^{\frac{3}{2}} \cdot dx + 5\int x^{\frac{1}{2}} \cdot dx - \int x^{-\frac{1}{2}} \cdot dx$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + 5 \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{5} \cdot x^{\frac{5}{2}} + \frac{10}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} - 2 \cdot x^{\frac{1}{2}} + C =$$

$$= 2\sqrt{x} \left(\frac{x^2}{5} + \frac{5x}{3} - 1 \right) + C$$

---

3 . جد ناتج التكامل : $\int \frac{x^2+5x+6}{x+3} \cdot dx$

الحل: نحلل

المقدار في البسط ثم نختصر ثم نكامل :

$$\int \frac{\cancel{(x+3)}(x+2)}{\cancel{(x+3)}} \cdot dx = \int (x+2)dx = \frac{x^2}{2} + 2x + C$$

---

4 . جـــد ناتج تكامل : $\int x\left(x^2-4\right)^3 dx$

الحـــل : نستخدم **طريقة التعويض** , فنفرض أن المقدار داخل القوس يساوي u :

$u = x^2 - 4$: $x\,dx$ لايجاد x بالنسبة الى u ثم نشتق

$$\frac{du}{dx} = 2x \quad \Rightarrow \quad \therefore \quad \frac{du}{2} = xdx$$

$$\int \left(x^2-4\right)^3 x dx = \int u^3 \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u^3 du = \frac{u^4}{8} + C = \frac{\left(x^2-4\right)^4}{8} + C$$

---

5 . جد ناتج تكامل : $\int sin(3x-2)\,dx$

الحـــل : نفرض $u = 3x-2$ اذن : $\frac{du}{3} = dx$ $\Rightarrow$ $\frac{du}{dx} = 3$

$$\therefore \int \sin(3x-2)\,dx = \frac{1}{3}\int \sin u\,du = \frac{1}{3}(-\cos u)+C = \frac{-1}{3}\cos(3x-2)+C$$

6 . جد ناتج تكامل : $\int x\sqrt{x-5}\,dx$

الحـــل : نفرض $u = x-5 \quad \leftarrow \quad x = u+5 \quad \leftarrow \quad dx = du$

$$\int x\sqrt{x-5}\,dx = \int (u+5)\,u^{\frac{1}{2}}\,du = \int u^{\frac{3}{2}}du + 5\int u^{\frac{1}{2}}du$$

$$= \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{10}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{5}\sqrt{(x-5)^5} + \frac{10}{3}\sqrt{(x-5)^3} + C$$

7. جد تكامل المقدار الاتي : $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$

الحـل : نستخدم طريقة التعويض

فنفرض أن $u = \ln x$ ثم نشتقها لإيجاد dx ونعوض في التكامل وكما يلي :

$$u = \ln x \quad \Longrightarrow \quad du = \frac{dx}{x}$$

$$\therefore \int \frac{\ln x}{x}dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{1}{2}\ln^2 x + C$$

8. جد ناتج التكامل للمقدار : $\int 5^{x^2}\,x\,dx$

الحل : نفرض الاس $u = x^2$

$$du = 2x\,dx \quad \Longrightarrow \quad \frac{du}{2} = x\,dx$$

$$\int 5^{x^2}\,x\,dx = \frac{1}{2}\int 5^u\,du = \frac{1}{2}\frac{5^u}{\ln 5} + C = \frac{5^{x^2}}{2\ln 5} + C$$

9. جد ناتج التكامـــــــل للمقـــدار : $\int \tan^2 x\,dx$

الحـل : بما ان : $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

$$\therefore \int \tan^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1)dx = \tan x - x + C$$

10. جد ناتج التكامـــــــل للمقـــدار : $\int \sec^2 x\,e^{\tan x}dx$

الحـل : نفرض الاس : $u = \tan x \quad \leftarrow \quad du = \sec^2 x\,dx$

$$\therefore \int sec^2 x\, e^{\tan x} dx = \int e^u du = e^u + C = e^{\tan x} + C$$

11. جد ناتج التكامـــــــل للمقـــدار : $\int cos^2 3x\, dx$

الحـل :من جدول التكامل الاساسي قانون رقم (19) :

$$\int cos^2 3x\, dx = \frac{x}{2} + \frac{sin\, 2(3)x}{4(3)} + C = \frac{x}{2} + \frac{sin\, 6x}{12} + C$$

12 . جد ناتج التكامل التالي : $\int \sqrt{\cos x} \cdot \sin x \cdot dx$.

الحـــل : نستخدم طريقة التعويض فنفرض أن $u = \cos x$ ثم نشتقها لإيجاد dx

$u = \cos x \longrightarrow du = -\sin x\, dx$ ونعوض في التكامل وكما يلي :

$$\therefore \int \sqrt{cosx} \cdot sinx \cdot dx = -\int \sqrt{u} \cdot du = -\int u^{\frac{1}{2}} \cdot du =$$

$$= -\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{3}\sqrt{u^3} + C = -\frac{2}{3}\sqrt{cos^3 x} + C$$

13 . جد ناتج التكامل التالي : $\int sin^3 x \cdot dx$.

الحـــل : $sin^3 x = sin^2 x \cdot sinx = (1 - cos^2 x) \cdot sinx$

$$\int sin^3 x \cdot dx = \int (1 - cos^2 x) \cdot sinx \cdot dx = \int sinx \cdot dx - \int cos^2 x \cdot sinx \cdot dx$$

نستخدم طريقة التعويض فنفرض أن $u = \cos x$ ثم نشتقها لإيجاد dx

$u = \cos x \longrightarrow du = -\sin x\, dx$ ونعوض في التكامل وكما يلي :

$$\int sinx \cdot dx + \int u^2 \cdot du = -cosx + \frac{u^3}{3} + C = \frac{1}{3} cos^3 x - cosx + C$$

•• حـل التكـامـل بالتجـزئـــة ••

إن هذه الطريقة تعتمد على قانون اشتقاق حاصل ضرب دالتين **(u , v)** دالة قابلة للاشتقاق وليست إحداهما مشتقة الأخرى . فان :

$$d(u.v) = u.dv + v.du \qquad \Longrightarrow \qquad u.dv = d(u.v) - v.du$$

وبتكامل الطرفين نحصل على : $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

$\int$ الاولى X الثانية = تكامل الثانية X الاولى – $\int$ تكامل الثانية X تفاضل الاولى

مثـال(1) : جــد ناتــج التكامــل الأتـــي : $\int x \cdot lnx \cdot dx$

الحـــل : نفرض أن: $u = lnx$, ثم نأخذ تفاضل الطرفين : $du = \frac{dx}{x}$

ونفرض ان : $dv = x\,dx$, ثم نكامل الطرفين : $v = \frac{x^2}{2}$

ثم نعوض في التكامل وكما يلي : $\int lnx \cdot xdx = u \cdot v - \int v \cdot du =$

$$= ln\,x.\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}.\frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} ln\,x - \frac{1}{2}\int x\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} ln\,x. - \frac{1}{4} x^2 + C = \frac{x^2}{2}\left(ln\,x - \frac{1}{2} \right) + C$$

مثـال (2) : جــد ناتــج التكامــل الأتـــي : $\int x \cdot sinx \cdot dx$

الحـــل : نفرض أن نفرض أن : $u = x$ ثم نأخذ تفاضل الطرفين $du = dx$

ونفرض ان : $dv = sin\,xdx$ ونكامل الطرفين $v = -cos\,x$

ثم نعوض في التكامل وكما يلي : $\int x \cdot sin\,x \cdot dx = \int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

$$\int x \cdot sin\,x \cdot dx = x \cdot (-cos\,x) - \int (-cos\,x) \cdot dx =$$

$$= -x \cdot cos\,x + sin\,x + C \;=\; sin\,x - x\,.cos\,x + C$$

مثال (3) : جد ناتج التكامل التالي : $\int x^3 e^{x^2}\,dx$

الحـــل : نفرض أن نفرض أن : $u = x^2$ ثم نأخذ تفاضل الطرفين $du = 2xdx$

ونفرض ان : $dv = e^{x^2} x dx$ ونكامل الطرفين $v = \frac{1}{2} e^{x^2}$

ثم نعوض في التكامل وكما يلي : $\int x^3 e^{x^2} dx = \int u.dv = u.v - \int v.du$

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \int x e^{x^2} dx$$

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

•• تطبيقات على التكامل غير المحدد••

مثـــال (1) : جـــد الدالة التي تساوي مشتقتها .

الحـــل : من شرط السؤال : $y' = y$ فنحصل على : $\frac{dy}{dx} = y \Rightarrow \frac{dy}{y} = dx$

بتكامل الطرفين نحصل على : $\int \frac{dy}{y} = \int dx \Rightarrow \ln y = x + C$

$$\therefore \quad y = e^{x+C} \Rightarrow y = e^C . e^x$$

ولكن e^C هو مقدار ثابت نفرضه يساوي : A

اذن الدالة التي تساوي مشتقتها هـــي : $y = A.e^x$

مثـــال (2) : حل المعادلة التفاضلية التالية : $\frac{dy}{dx} = \cos x - 7$ عند النقطه **(0,3)**

الحـــل : نعزل **y** عن **x** ونكامل الطرفين: $\frac{dy}{dx} = \cos x - 7 \Rightarrow dy = (\cos x - 7)dx$

$$\int dy = \int \cos x\, dx - 7\int dx \Rightarrow y = \sin x - 7x + C$$

When x=0 , y=3 $\Rightarrow 3 = \sin 0 - 7(0) + C \Rightarrow C = 3$

اذن حل المعادلة التفاضلية هـــو : $y = \sin x - 7x + 3$

مثال (3): حل المعادلة التفاضلية التالية : $y' = 3x^2 y^2$

الحـل : نعزل **y** عن **x** ونكامل الطرفين: $\frac{dy}{dx}=3x^2y^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y^2}=3x^2dx$

$$\int y^{-2}dy=3\int x^2dx \quad \Rightarrow \quad \frac{-1}{y}=x^3+C$$

مثال (4): جد معادلة المنحني الذي ميله يساوي $(2x+5)$ واحدى نقاطه **(1,4)**

الحل: ميل المنحني يساوي $\frac{dy}{dx}$:

$$\therefore \frac{dy}{dx}=(2x+5) \quad \Rightarrow \quad dy=(2x+5)dx$$

نكامل الطرفين : $\int dy=2\int xdx+5\int dx \quad \Rightarrow \quad y=x^2+5x+C$

من النقطة **(1,4)** نعوض عن : **x=1 , y=4** $4=1^2+5(1)+C \quad \Rightarrow \quad C=-2$

مثال (5): جد معادلة المنحني الذي ميله يساوي ax^2-6x-9 وللمنحني نقطة انقلاب هـي **(1,-2)**

الحل: ميل المنحني $\frac{dy}{dx}=$: $\therefore \frac{dy}{dx}=ax^2-6x-9$

نكامل الطرفين:

$$dy=ax^2dx-6xdx-9dx \quad \Rightarrow \quad \int dy=a\int x^2dx-6\int xdx-9\int dx$$

$$y=\frac{a}{3}x^3-3x^2-9x+C$$

نجد قيم كل من C , a كما يلي :

نقطة الانقلاب **(1,-2)** تحقق معادلة المنحني :

$$-2=\frac{a}{3}(1)^3-3(1)^2-9(1)+C \quad \Rightarrow \quad 10=\frac{a}{3}+C.....(1)$$

عند نقطة الانقلاب $y''=0$:

$$y''=2ax-6 \quad \Rightarrow \quad 0=2a(1)-6 \quad \Rightarrow \quad \therefore a=3$$

نعوض a في **(1)** ونجد **C=9** , اذن **معادلة المنحني هـي :**

$$y=x^3-3x^2-9x+9$$

مثال (6): اذا كان : $f'(x)=x(3x-2)$, حيث : $f(2)=-5$ اوجد : $f(x)$

الحل:

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=x(3x-2) \quad \Rightarrow \quad dy=3x^2dx-2xdx$$

$$\int dy=3\int x^2dx-2\int xdx \quad \Rightarrow \quad y=x^3-x^2+C$$

بما ان : $f(2)=-5$ اذن :

$$-5=2^3-2^2+C \quad \Rightarrow \quad C=-9$$

اذن المنحني هـو : $f(x)=x^3-x^2-9$

حسابات تغير الفولتية والتيار بدلالة الزمن

ان فرق الجهد **Potential differences (P.d.)** والذي يرمز له V_R **عبر أي مقاومة** قيمتها R يساوي :

$$V_R=iR$$

حيث ان i هو التيار والذي يمثل معدل تغير الشحنة q بالنسبة للزمن t :

$$i=\frac{dq}{dt} \quad \Rightarrow \quad \therefore \quad V_R=R\frac{dq}{dt}$$

فرق الجهد عبر المحث : Voltage across an inductor

ان فرق الجهد **عبر المحث** V_L في الدائرة الكهربائية يتناسب طرديا مع معدل تغير التيار بالنسبة للزمن , ويسمى ثابت التناسب L معامل الحث الذاتي ويقاس **بالهنري Henry** ووحدة الهنري H هـي : $\frac{volt\ sec.}{ampere}$, ملي هنري $mH=10^{-3}H$

$$V_L=L\frac{di}{dt} \quad \Rightarrow \quad \therefore \quad i=\frac{1}{L}\int V_L\,dt$$

التيار خلال المكثف : Current through a capacitor

بما ان السعة الكهربائية للمكثف C هي نسبة بين مقدار شحنة الموصل q ومقدار جهده الكهربائي V_C (وهـي مقدار ثابت) , اذن :

$$C = \frac{q}{V_C} \quad \Longrightarrow \quad \therefore \quad q = C\,V_C$$

ولحساب التيار نشتق الطرفين بالنسبة للزمن t :

$$\frac{dq}{dt} = C\,\frac{dV_C}{dt} \quad \Longrightarrow \quad \therefore \quad i = C\,\frac{dV_C}{dt} \quad \Longrightarrow \quad V_C = \frac{1}{C}\int i\,dt$$

تقاس سعة المكثف C بوحدة فاراد F وهـي : $\frac{coulombs}{volt}$

مايكرو فاراد $\mu F = 10^{-6}\,F$

مثال (1) : مكثف سعته $5\,\mu F$, وفرق الجهد عبر دائرته $V = 200\,\cos 10000\,t$ احسب تيار الدائرة .

الحـل :

$$i = C\frac{dV}{dt} = 5\times 10^{-6}\,[\,200(-\sin 10000\,t\,)10000\,]$$

$$i = -10\sin 10000\,t \quad ampere$$

مثال (2) : ملف نقي معامل حثه $L = 0.02\,H$, يؤثر عليه جهد دائرة مقداره $V = 150\,\sin 1000\,t$ احسب تيار الدائرة .

الحـل :

$$i = \frac{1}{L}\int V_L\,dt = \frac{1}{0.02}\int 150\sin 1000t\;dt$$

$$i = \frac{150}{0.02}\left(\frac{-\cos 1000t}{1000}\right) + c = -7.5\cos 1000t + c \quad ampere$$

مثال (3) : ملف معامل حثه $L = 12\,H$, ومقاومة سلكه $R = 10\,\Omega$, التيار خلال الملف هـو : $i = 3[1-e^{-2t}]$, جد فرق الجهد عبر الملف .

الحـل :

$$V_R = i\,R = 10(3[1-e^{-2t}]) = 30[1-e^{-2t}] \quad volt$$

$$V_L = L\frac{di}{dt} = 12[-3e^{-2t}(-2)] = 72\,e^{-2t} \quad volt$$

$$V = V_R + V_L = 30[1-e^{-2t}] + 72\,e^{-2t} = 30 + 42\,e^{-2t} \quad volt$$

مثال (4) : مكثف سعته $0.1F$, والتيار خلاله $i = 50\,\cos \pi\,t$ جد **(P.d.)** .

الحـل :

$$V_C = \frac{1}{C}\int i\,dt = \frac{1}{0.1}\int 50\cos \pi t\,dt = \frac{500}{\pi}\sin \pi t + c \quad volt$$

مثال (5) : ملف نقي له محاثة مقدارها $L = 15\ H$, فاذا كان تيار الدائرة هـو : $i = 5\cos(t+1) \qquad t \geq 0$, جد الزمن الاول الذي تكون عنده فولتية الدائرة تساوي $V = 75\ volt$.

الحـل :

$$V_L = L\frac{di}{dt} = 15[5(-\sin(t+1))] = -75\sin(t+1) = 75$$

$$\therefore \ \sin(t+1) = -1 \qquad let \quad t+1 = Z$$

$$\sin Z = -1 \quad \Rightarrow \ \therefore Z = 270 \qquad Z = t+1\ ,\ \ Z \geq 1$$

$$Z = \frac{3\pi}{2} = \frac{3(3.14)}{2} = 4.71$$

$$\therefore \quad t = Z - 1 = 4.71 - 1 = 3.71 \ \ sec\ .$$

تمـــــارين للتدريـــــب

1) مكثف سعته 10^{-2} فاراد وتيار الدائرة يعبر عنه : $i = 10 - e^{-t}$ جد فرق الجهد عبر طرفي المكثف . (ج : $100(10\,t + e^{-t})$)

2) جد فولتية دائرة ملف معامل حثه يساوي $L = 20\ H$ ومقاومة سلكه $2\ \Omega$ اذا كان تيار الدائرة هـو : $i = 5\cos\ \omega t$.

(ج : $10\cos \omega t - (100\omega)\sin \omega t$)

3) ملف نقي له محاثة قيمتها L هنري وتيار دائرته يعبر عنه $i = 10\sin 200\pi t$

جد فولتية الدائرة . (ج : $2000\pi L\cos 200\pi t$)

4) ملف مقاومة سلكه $50\ \Omega$ ومعامل حثه $L = 20\ H$ ربطت معه على التوالي مقاومة قيمتها $150\ \Omega$, فاذا كان تيار الدائرة هـو : $i = 4[1 - e^{-t}\sin t]$

جـد : أ) فرق الجهد عبر كل من المقاومة والملف

ب) فرق الجهد الكلي للدائرة V_T عند الزمن $t = \pi$ ثانية

(ج : $V_T = 800 + \frac{80}{e^{\pi}}$)

5) اذا كان تيار الدائرة الكهربائية لملف (مقاومة سلكه $5\ \Omega$ ومعامل حثه $5\ H$) يعبر عنه بالمقدار : $i = 2 - 2e^{-t}$ جـد :

أ) فرق الجهد P.d. عبر الملف (ج : 10 فولت)

ب) اذا ربطت مقاومة على التوالي مع الملف مقدارها $10\ \Omega$ جد فرق الجهد للدائرة عند الزمن $t=2$ ثانية .

(ج : $30-\frac{20}{e^2}$ فولت)

السرعـــة و التعجيـــل

اذا فرضنا السرعة v والمسافة s والتعجيل a والزمن t فانه :

عندما نشتق المسافة بالنسبة للزمن نحصل على السرعة v : $v=\frac{ds}{dt}$

وعندما نشتق السرعة بالنسبة للزمن نحصل على التعجيل a : $a=\frac{dv}{dt}$

مثال (1) : اذا كان : $s=t^3+1$ حيث ان s هي المسافة المقطوعة في الزمن t جد السرعة v والتعجيل a .

الحل :

السرعة تساوي $v=\frac{ds}{dt}=3t^2$, التعجيل يساوي $a=\frac{dv}{dt}=6t$

وبالعكس فان تكامل التعجيل يساوي السرعة :

$$v=\int a\,dt=\int 6t\,dt=6\frac{t^2}{2}+C=3t^2+C$$

وتكامل السرعة يساوي المسافة (الازاحة) :

$$s=\int v\,dt=\int 3t^2\,dt=3\frac{t^3}{3}+C=t^3+C$$

مثال (2) : جسم يتحرك بخط مستقيم من السكون وكانت سرعته تساوي : $v=3t^2+2\quad m/sec$, جد ازاحته في أية لحظة , ثم جد ازاحته بعد 2 ثانية.

الحل:

$$v=\frac{ds}{dt}=3t^2+2 \quad\Rightarrow\quad ds=3t^2dt+2dt$$

$$\int ds=3\int t^2dt+2\int dt \quad\Rightarrow\quad s=t^3+2t+C$$ نكامل الطرفين :

الجسم يتحرك من السكون , اذن عندما **t=0** فان **s =0** :

$$0=(0)^3+2(0)+C \quad\Rightarrow\quad C=0$$

اذن الازاحة في اية لحظة هي : $s=t^3+2t$

الازاحة بعد **2** ثانية , اي عندما **t=2** : $s=(2)^3+2(2)=12\ m$

مثال (3): جسم يتحرك بتعجيل قدره $5\ m/sec^2$ فاذا علمت انه بعد 6 ثواني يكون قد قطع **180 m** وسرعته في تلك اللحظة تساوي $45\ m/sec$ ماهي ازاحته في أية لحظة.

الحل : التعجيل = 5 من السؤال : $a=\frac{dv}{dt}=5 \quad \Rightarrow \quad dv=5dt$

$$\int dv=5\int dt \quad \Rightarrow \quad v=5t+C$$

السرعة بعد **6** ثواني هي $45\ m/sec$: $45=5(6)+C \quad \Rightarrow \quad C=15$

اذن السرعة في اية لحظة هي : $v=5t+15$

$$v=\frac{ds}{dt}=5t+15 \quad \Rightarrow \quad ds=5t\,dt+15dt$$

نكامل الطرفين : $s=\frac{5}{2}t^2+15t+C$

بعد **6** ثواني الجسم يقطع **180 m** : $180=\frac{5}{2}(6)^2+15(6)+C \quad \Rightarrow \quad C=0$

اذن الازاحة في أية لحظة هـي: $s=\frac{5}{2}t^2+15t$

مثال (4): اطلقت رصاصة الى الاعلى شاقوليا بسرعة ابتدائية قدرها $1280\ ft/sec$ جد ارتفاعها بعد t ثانية .

الحـل:

التعجيل الارضي بفعل الجاذبية (في حالة سقوط الجسم) = $32\ ft/sec^2$ وهو ثابت لا يتغير

اما التعجيل **ضد** الجاذبية الارضية = $-32\ ft/sec^2$

$$v=\int a\,dt=\int(-32)dt=-32t+C$$

عندما **t=0** , $v=1280\ ft/sec$: $1280=-32(0)+C \quad \Rightarrow \quad C=0$

اذن السرعة الانية هـي: $v=1280-32t$

$$s=\int v\,dt=\int 1280\,dt-\int 32t\,dt=1280t-16t^2+C$$

عندما **t=0** , $s=0$: $\therefore \quad C=0$

المسافة المقطوعة في أية لحظة : $s=1280t-16t^2$

• التكـامـل المحـــدد •

DEFINITE INTEGRATION

الدالة $f(x)$ موجبة ومستمرة خلال الفترة $[a,b]$ اي ان قيمة x هي : $a \le x \le b$ ،
يعرف التكامل المحدد بالقانون التالي :

$$\int_a^b f'(x)\cdot dx = f(x)\Big]_a^b = f(b) - f(a)$$

ونطبق ذات قواعد التكامل غير المحدد غير اننا لا نضيف ثابت التكامل **C** وانما نعوض الحد

$$\int_{-1}^{2} \frac{3x\,dx}{1+2x^2}$$

الاعلى للتكامل **(b)** في النتيجة ونطرح منه قيمة التعويض في الحد الادنى للتكامل **(a)** .

مثـال (1) : احسب ناتج التكامل الاتي : .

الحـل : نفرض أن $u = 1+2x^2$: ثم نشتقها لإيجاد **xdx** ونعوض في التكامل **:**

$$u = 1+2x^2 \quad \rightarrow \quad du = 4x\,dx \quad \rightarrow \quad \frac{du}{4} = x dx$$

$$\int_{-1}^{2} \frac{3x dx}{1+2x^2} = \frac{3}{4}\int_{-1}^{2} \frac{du}{u} = \frac{3}{4} ln\, u\Big]_{-1}^{2} = \frac{3}{4} ln(1+2x^2)\Big]_{-1}^{2} =$$

$$= \frac{3}{4}(ln 9 - ln 3) = \frac{3}{4}(ln 3^2 - ln 3) = \frac{3}{4}(2 ln 3 - ln 3) = \frac{3}{4} ln 3$$

$$\int_0^1 x^2 e^x \cdot dx$$

مثـال (2) : احسب ناتج التكامل الاتي :

_ نستخدم قانون تجزئة التكامل : $\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du$ فنفرض أن

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx$$

$$\int x^2\cdot e^x\cdot dx = x^2 e^x - 2\int x\cdot e^x\cdot dx$$

$$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$$

التجزئة مره اخرى للتكامل الاخير :

$$u = x \Rightarrow du = dx \qquad dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$$

$$\int x \cdot e^x \cdot dx = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x$$

$$\int_0^1 x^2 e^x \cdot dx = \left[x^2 \cdot e^x - 2(x \cdot e^x - e^x) \right]_0^1 =$$

$$= (1 \cdot e - 2 \cdot e + 2 \cdot e) - (0 - 0 + 2) = e - 2$$

مثـال (3) : إحسب ناتج التكامل الاتي : $\int_{}^{\pi} \sin 2x \cdot dx$.

الحـل :

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \sin 2x . dx = \frac{-1}{2} \cos 2x \Big|_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= \frac{-1}{2} \left[\cos 2\pi - \cos 2\frac{\pi}{2} \right] = \frac{-1}{2} [1 - (-1)] = -1$$

مثـال (4) : إحسب ناتج التكامل الاتي : $\int_{}^{3} \frac{x^2 + x - 5}{} dx$.

الحـل : نستخدم طريقة التعويض فنفرض أن : $x - 1 = z \leftarrow x = z + 1$ ثم نشتقها لإيجاد **dx** ونعوض في التكامل , وكما يلي : $dx = dz$

$$\int_2^3 \frac{x^2 + x - 5}{x - 1} dx = \int_2^3 \frac{(z+1)^2 + z + 1 - 5}{z} dz =$$

$$= \int_2^3 \frac{z^2 + 3z - 3}{z} dz = \int_2^3 z\, dz + 3\int_2^3 dz - 3\int_2^3 \frac{dz}{z} =$$

$$= \frac{z^2}{2}\Big|_2^3 + 3z\Big|_2^3 - 3\ln z\Big|_2^3 = \frac{(x-1)^2}{2}\Big|_2^3 + 3(x-1)\Big|_2^3 - 3\ln(x-1)\Big|_2^3 =$$

$$= 2 - \frac{1}{2} + 6 - 3 - 3\ln 2 = \frac{9}{2} - 3\ln 2$$

مثال (5).جد ناتج التكامل التالي : $\int_{-3\pi}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{du}{\cos^2 \frac{x}{3}}$

الحـل: نفرض قيمة الزاوية : $\frac{x}{3}=u \quad \Leftarrow \quad dx=3du$

$$\int_{\frac{-3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{3}} = 3\int_{\frac{-3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{du}{\cos^2 u}$$

$$= 3\left[\tan\frac{x}{3}\right]_{-3\pi}^{\frac{3\pi}{4}} = 3\left[\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{-\pi}{4}\right] = 3[1-(-1)] = 6$$

إيـجــاد طــول قـوس المنـحنـــي (L)

عندما تكون الدالة $y=f(x)$ مستمرة وهي لمتغير واحد , فان طول قوس المنحني بين النقطتين $A(a,c)$, $B(b,d)$ يساوي:

$$L = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

وفي تطبيقات كثيرة يكون المنحني مسار لنقطة متحركة احداثياتها (x,y) وهما دالتان لمتغير آخر مثل الزمن t حيث ان : $x=f(t)$, $y=g(t)$

ولايجاد طول قوس المنحني عند تغير t من t_a الى t_b :

$$L = \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

ويمكن كتابة المعادلة بالشكل التالي : $L=\int\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$

مثال (1) : جد طول قوس المنحني للدالة $y=x^{\frac{3}{2}}$ للفترة من النقطة $(0,0)$ الى النقطة $(4,8)$.

الحـل :

$$y = x^{\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4} x}\, dx$$

$$L = \frac{4}{9} \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4} x}\, \left(\frac{9}{4}\right) dx = \frac{4}{9} \left[\left(1 + \frac{9}{4} x\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{3}\right) \right]_0^4$$

$$L = \frac{8}{27} \left\{ \left[1 + \frac{9}{4}(4)\right]^{\frac{3}{2}} - \left[1 + \frac{9}{4}(0)\right]^{\frac{3}{2}} \right\} = 9.07$$

وحدة طول

مثال (2). جد المسافة المقطوعة للنقطة $P(x, y)$ من $t = 0$ الى $t = 3$ اذا كان مكان النقطة عند الزمن t كما معطى في المعادلتين :

$$x = \frac{(2t+3)^{\frac{3}{2}}}{3} \quad , \quad y = \frac{t^2}{2} + t$$

الحـل: نشتق كل من y ، x بالنسبة الى t :

$$dx = \frac{3}{2}(2t+3)^{\frac{1}{2}}\,(2)dt = (2t+3)^{\frac{1}{2}}\,dt \quad , \quad dy = (t+1)dt$$

$$L = \int_0^3 \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_0^3 \sqrt{(t+1)^2 + (2t+3)}\, dt = \int_0^3 (t+2)dt = 10.5$$

مثال(3). جد طول قوس المنحني للدالة $y = \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}$ على الفترة $[1,4]$.

الحـل : نشتق y بالنسبة الى x :

$$\frac{dy}{dx} = (x-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + (x-1)}\, dx = \int_1^4 \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 = \frac{14}{3} \text{ (و.ط)}$$

مثال(4). جد طول قوس منحني الدالة $y = \frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$ للفترة $[0,3]$.

الحـل : نجد المشتقة $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2}(x^2+2)^{\frac{1}{2}}(2x)$$

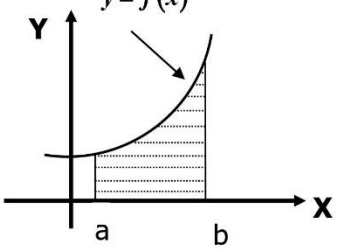
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = x^4 + 2x^2$$

$$L = \int_0^3 \sqrt{1 + x^4 + 2x^2}\,dx = \int_0^3 \sqrt{(x^2+1)^2}\,dx = \int_0^3 (x^2+1)dx$$

$$L = \frac{x^3}{3}\Big]_0^3 + x\Big]_0^3 = 9 + 3 = 12 \text{ (و.ط)}$$

المساحـــة تحت المنحنـــــــى

لتكن $y = f(x)$ دالة مستمرة في الفترة $[a,b]$ فالمساحة المحددة بمنحني الدالة والمحور x وكل من المستقيمين $x = a$, $x = b$ تساوي :



$$A = \int_a^b f'(x)dx = f(x)\Big]_a^b = f(b) - f(a)$$

قانون المساحة بين المنحني والمحور x :

$$A = \int_{x=a}^{x=b} y\,dx$$

قانون المســاحة بيـــن المنحنـي والمحـور y :

$$A = \int_{y=c}^{y=d} x\,dy$$

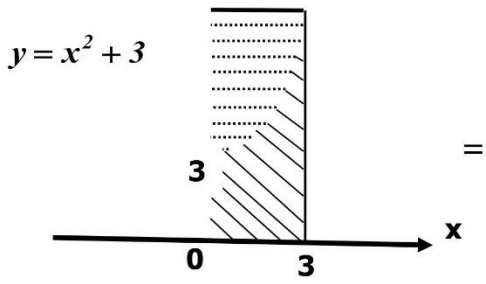
مثال (1) . جد المساحة المحددة بمنحني الدالة: $y = f(x) = x^2 + 3$ والمحور x وكل من $x = 3$, $x = 0$ ثم اوجد المساحة بين المنحني والمحور y .

y

الحل :المساحة بين المنحني والمحور x :

12

الصفحة 40



$$A = \int_a^b y\,dx = \int_0^3 \left(x^2 + 3\right)dx$$

$$= \left[\left(\frac{27}{3} + 9\right) - 0\right] = 18 = \left[\frac{x^3}{3} + 3x\right]_0^3$$

(و.م)

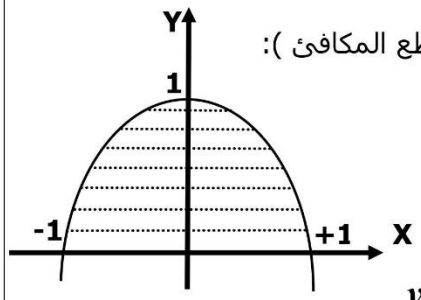
لايجاد المساحة بين المنحني والمحور **y** ,
نكتب **x** بدلالة **y** كما يلي :

$$y = x^2 + 3 \quad \Rightarrow \quad x^2 = y - 3 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{y-3}$$

حدود التكامل : عندما **x=0** , **y=3** , وعندما **x=3** , **y=12**

$$A = \int_c^d x\,dy = \int_3^{12} \sqrt{y-3}\,dy = \frac{(y-3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg]_3^{12} = \frac{2}{3}\left[(12-3)^{\frac{3}{2}} - (3-3)^{\frac{3}{2}}\right] = 18$$

وحدة مربعة



مثـــال (2) : جد المساحة المحصورة بين المنحني (القطع المكافئ):

$y = 1 - x^2$ والمحور **x** .

الحـــل : نجد أولا نقاط تقاطع المنحني

مع المحور x لنعتبرها حدوداً للتكامل :

$$y = 1 - x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1$$

$$A = \int_{-1}^{+1} \left(1 - x^2\right)dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{+1} = \left[1 - \frac{1}{3}\right] - \left[-1 - \frac{-1}{3}\right] = \frac{4}{3}$$ (و.م)

مثـــال (3) : جد المساحة المحصورة بين المحور **x** وقوس واحد لمنحني الدالة

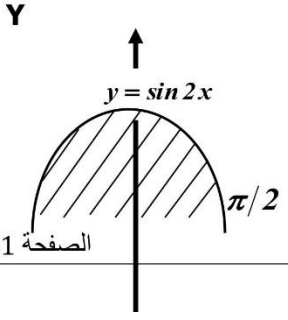
$y = \sin 2x$

الحل: نجد نقاط التقاطع مع المحور x :

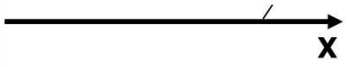
$$0 = \sin 2x \quad \Rightarrow \quad \therefore 2x = \pi$$

حدود التكامل :

$$\therefore x = 0 \quad , \quad x = \frac{\pi}{2}$$

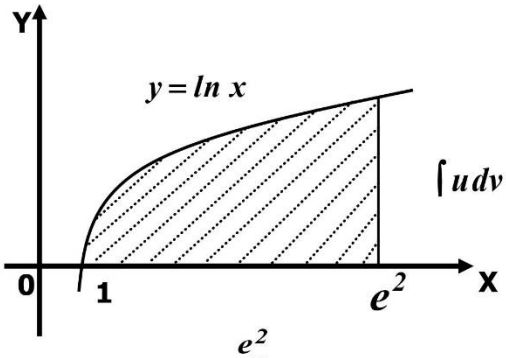


$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\left[-\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$



$$A=\frac{-1}{2}\left[\cos\pi-\cos 0\right]=\frac{-1}{2}\left[-1-1\right]=1$$ (و.م)

مثال (4). إحسب المساحة تحت منحني الدالة اللوغاريتمية $y=\ln x$ والمحور **x** , من النقطة $x=1$ الى النقطة $x=e^2$.



$$A=\int_1^{e^2}\ln x\,dx$$

الحل :

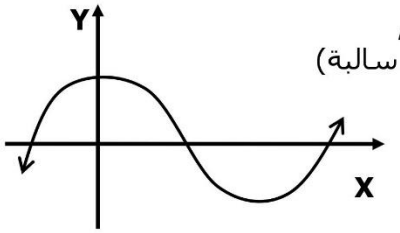
نستخدم قانون تجزئة التكامل $\int u\,dv=u.v-\int v\,du$

فنفرض ان : $u=\ln x \Leftarrow du=\frac{dx}{x}$

$dv=dx \Leftarrow v=x$

$$A=\int_1^{e^2}\ln x\,dx=x\ln x-\int x\frac{dx}{x}=x\ln x-x\Big]_1^{e^2}$$

$$A=\left[e^2.\ln e^2-e^2\right]-\left[1.\ln 1-1\right]=\left[2e^2-e^2\right]-\left[0-1\right]=e^2+1$$ **(و.م)**



قد تتجزأ المساحة بين المنحني والمحور **x** الى جزئين ,
جزء فوق المحور **x** (**y** موجبة) وجزء تحت المحور **x** (**y** سالبة)
وعليه نأخذ القيمة المطلقة للتكامل كما يلي :

$$A=A_1+A_2=\int_d|y|dx+\int_e|y|dx$$

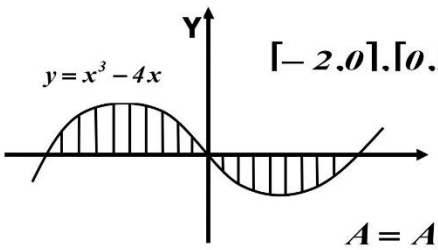
مثال (5): احسب المساحة المحددة بين منحني الدالة $y=x^3-4x$ والمحور **x** .

الحل : نجد نقاط التقاطع مع المحور **x** :

$$0=x^3-4x=x\left(x^2-4\right)$$

$$x=0\ ,\ x=+2\ ,\ x=-2$$

حدود التكامل :



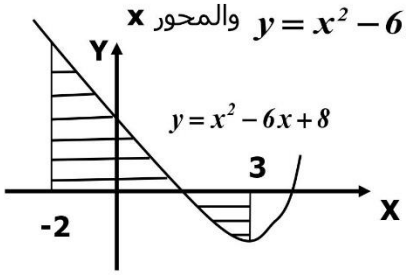
من الشكل نلاحظ ان المساحة تتجزأ بين الفترتين $[-2,0]\,.\,[0,2]$

$$A=A_1+A_2=\int_{-2}^{0}\left|\left(x^3-4x\right)\right|dx+\int_0^2\left|\left(x^3-4x\right)\right|dx$$

$$A=\left|\left[\frac{x^4}{4}-2x^2\right]_{-2}^{0}\right|+\left|\left[\frac{x^4}{4}-2x^2\right]_{0}^{2}\right|=|4|+|-4|=8$$

(و.م)

مثال (6): احسب المساحة المحددة بالمنحني $y=x^2-6x+8$ والمحور x والمستقيمان $x=-2$, $x=3$.



الحل : نقاط التقاطع مع المحور x هي :

$$0=x^2-6x+8=(x-2)(x-4) \quad \Rightarrow x=2\ ,\ x=4$$

من الشكل نجد ان المساحة تتجزأ الى جزئين :

$$A=A_1+A_2=\int_{-2}^{2}(x^2-6x+8)dx+\int_{2}^{3}\left|(x^2-6x+8)\right|dx$$

$$A=\left[\frac{x^3}{3}-3x^2+8x\right]_{-2}^{2}-\left|\left[\frac{x^3}{3}-3x^2+8x\right]_{2}^{3}\right|=\frac{88}{3}+\frac{17}{3}=35$$

(و.م)

مثال (7): احسب المساحة المحددة بالمنحني $y=x^3+2x^2-3x$ والمحور x

الحل :

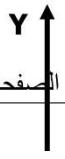
$$y=x(x^2+2x-3)=x(x-1)(x+3)=0$$
$$\therefore \quad x=0\ ,\ x=1\ ,\ x=-3$$

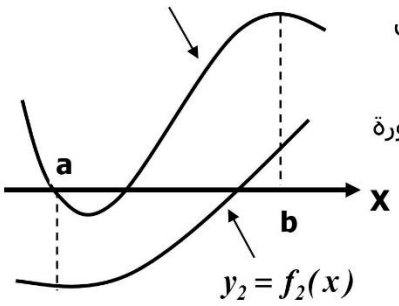
$$A=\int_{}^{0}(x^3+2x^2-3x)dx+\int_{}^{1}(x^3+2x^2-3x)dx$$

$$A=\frac{x^4}{}+\frac{2}{}x^3-\frac{3}{}x^2\Big]^{0}\quad+\frac{x^4}{}+\frac{2}{}x^3-\frac{3}{}x^2\Big]^{1}$$

$$A=\frac{81-72-54}{}+\frac{3+8-18}{}=\frac{-142}{}=\left|\frac{71}{}\right|$$ وحدة مربعة

المساحـــــة بيـن منحنييـــن





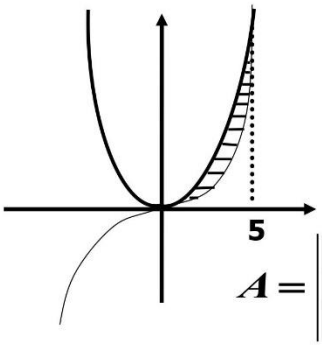
لتكن $y_2 = f_2(x)$, $y_1 = f_1(x)$ دالتان مستمرتان في الفترة $[a,b]$, ولنفرض ان المنحني y_1 هو اعلى من المنحني y_2 من a الى b فان المساحة المحصورة بين المنحنيين كما في الشكل المجاور هـــي :

$$A = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx$$

مثال (1) : احسب المساحة المحددة بالمنحنيين $y = 5x^2$ ، $y = x^3$.

الحـــل : نجد اولاً نقاط التقاطع بين المنحنيين : $x^3 = 5x^2 \quad \Rightarrow \quad x^3 - 5x^2 = 0$

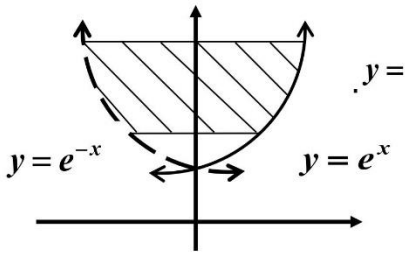
$$x^2(x-5) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad , \quad x = 5$$



$$A = \int_0^5 (x^3 - 5x^2)dx = \frac{x^4}{4} - \frac{5x^3}{3}\Big]_0^5$$

$$A = \left|\left[\frac{5^4}{4} - \frac{5(5)^3}{3}\right] - [0]\right| = \left|-\frac{625}{12}\right| = \frac{625}{12}$$ (و.م)

مثـــال (2): إحسب المساحة المحصورة بين الدالتين : $y_1 = e^x$ و $y_2 = e^{-x}$ والمستقيمين $y = 4$, $y = 2$.



الحل : بما ان المطلوب المساحة بين المنحنيين والمحور y , نكتب الدالتين x بدلالة y :

(نحول الدالتين من الصيغة الاسية الى اللوغاريتمية) كما يلي :

$$y_1 = e^x \quad \Rightarrow \quad x = \ln y \qquad , \qquad y_2 = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad x = -\ln y$$

نحسب المساحة للفترة $[2,4]$:

$$A = \int_2^4 [\ln y - (-\ln y)]dy = 2\int_2^4 \ln y\, dy$$

نستخدم قانون تجزئة التكامل : $\int u\,dv = u.v - \int v\,du$

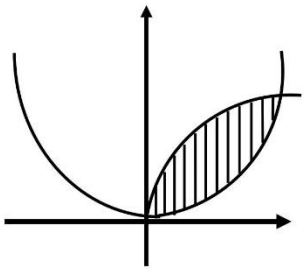
فنفرض ان : $u = \ln y \Leftarrow du = \frac{dy}{y}$ $\quad dv = dy \Leftarrow v = y$

$$A = 2\int_2^4 \ln y\,dy = 2\left[y\ln y - \int_2^4 y\frac{dy}{y}\right] = 2\left[y\ln y - \int_2^4 dy\right] = 2\left[y\ln y - y\right]_2^4$$

$$A = 2\left[(4\ln 4 - 4) - (2\ln 2 - 2)\right] = 12\ln 2 - 4$$ (و.م)

مثـــال (3): إحسب المساحة المحصورة بين الدالتين : $y_1 = \frac{x^2}{2}$ و $y_2 = 4\sqrt{x}$

الحـــل : نحدد نقاط التقاطع بين المنحنيين :



$$4\sqrt{x} = \frac{x^2}{2} \Rightarrow 8\sqrt{x} = x^2$$

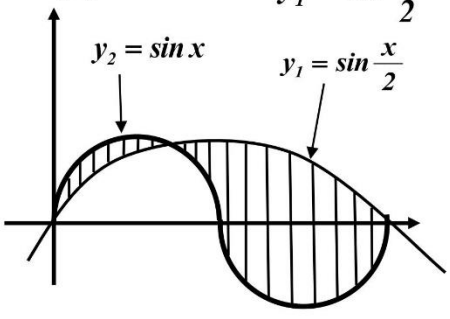
نربع الطرفين : $x^4 - 64x = 0 \Rightarrow x = 0\ ,\ x = 4$

$$A = \int_0^4 \left(4\sqrt{x} - \frac{x^2}{2}\right)dx = \left[4\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{2\times 3}\right]_0^4 = \left[\frac{8}{3}(4)^{\frac{3}{2}} - \frac{64}{6}\right] - 0 = \frac{64}{6}$$

(و.م)

مثال(4): جد المساحة المحصورة بين المنحنيين $y_1 = \sin\frac{x}{2}$ ، $y_2 = \sin x$ ضمن الفترة $[0, 2\pi]$.

الحـــل:



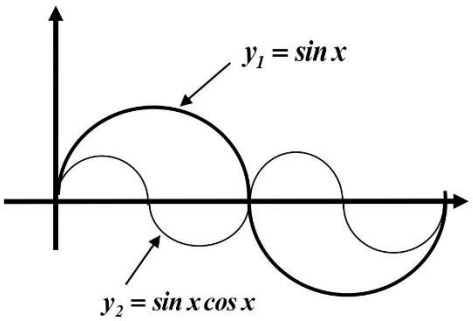
$$A = \int_0^{2\pi} (\sin x - \sin\frac{x}{2})dx$$

$$A=\left[-\cos x-(-2\cos\frac{x}{2})\right]_0^{2\pi}$$

$$A=\left[(-\cos 2\pi+2\cos\pi)-(-\cos 0+2\cos 0)\right]$$

$$A=\left|\left[(-1+2(-1))-(-1+2)\right]\right|=\left|-4\right|=4$$ (و.م)

مثال(5): جد المساحة المحصورة بين المنحنيين $y_1=\sin x$ ، $y_2=\sin x\cos x$ ضمن الفترة $[0,2\pi]$.



الحـل : نجد نقاط التقاطع بين المنحنيين :

$$\sin x=\sin x\cos x$$
$$\sin x-\sin x\cos x=0$$
$$\sin x(1-\cos x)=0$$
$$\sin x=0\quad,\quad\cos x=1$$
$$\therefore\quad x=0\quad,\quad x=\pi\quad,\quad x=2\pi$$

$$A=\int_0^{\pi}(\sin x-\sin x\cos x)dx+\int_{\pi}^{2\pi}(\sin x\cos x-\sin x)dx$$

$$A=\left[-\cos x\right]_0^{\pi}-\frac{1}{2}\left[\sin^2 x\right]_0^{\pi}+\frac{1}{2}\left[\sin^2 x\right]_{\pi}^{2\pi}-\left[-\cos x\right]_{\pi}^{2\pi}=4$$ (و.م)

رابعا : الاختبار البعدي

ضع دائرة حول الاجابة الصحيحة لكل مما ياتي :

١ – جد كل الاعداد المركبة التي تحقق المعادلة $Z^2 = j4$ مع التمثيل بالرسم.

(c $-\sqrt{2}\ (1+j)$
(d $(1 + j)$
(e $(-1 + j)$

٢ – جد الجدور الثلاثة للعدد المركب $Z = -1 + j$ مع التمثيل بالرسم

(a $Z1 = COS(-16) + J\ SIN(-15)\ ,\ Z2 = COS(-44)\ ,\ Z3 = COS(225)$
(b $Z1=2^{1/6}\ COS(-15)+JSIN(-15),\ Z2=2^{1/6}\ COS(105)+J\ SIN(-15),$
$Z3= 2^{1/6}\ COS\ (225) + J\ SIN\ (225)$

مفاتيح الاجابة على الاختبارات

الاختبار القبلي		الاختبار البعدي	
رقم السؤال	الاجابة الصحيحة	رقم السؤال	الاجابة الصحيحة
١	A	١	A
٢	B	٢	B
٣	A		

المصادر الاساسية :

Monaghan, J., Ely, R., Pinto, M. M., & Thomas, M. (2023). *The learning and teaching of Calculus: ideas, insights and activities*. Taylor & Francis.

20191008_080722_640.pdf (uoninevah.edu.iq)

خارطة القياس المعتمدة

المحتوى التعليمي	عناوين الفصول	الأهمية النسبية	الأهداف السلوكية					عدد الفقرات
			المعرفة	الفهم	التطبيق	التحليل	التقييم	
			النسبة					
الفصل الثاني	التفاضل والتكامل	١٠٠ %	٣٥%	٢٥ %	١٠%	١٠%	٢٠ %	٥