وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
الجامعة التقنية الشمالية
معهد التقني الدور

الحقيبة التعليمية

القسم العلمي:تقنيات الإلكترونية

اسم المقرر: اسس الرياضيات

المرحلة / المستوى: الاول

الفصل الدراسي: الاول

السنة الدراسية:٢٠٢٤/٢٠٢٥



معلومات عامة

اسم المقرر:	اسس الرياضيات						
القسم:	الالكترونيك						
الكلية:	معهد تقني الدور						
المرحلة / المستوى	الاول						
الفصل الدراسي:	الاول						
عدد الساعات الاسبوعية:	نظري	٤	عملي				
عدد الوحدات الدراسية:	٤						
الرمز:	TIDO100						
نوع المادة	نظري	*	عملي		كلهما		
هل يتوفر نظير للمقرر في الاقسام الاخرى	كلا						
اسم المقرر النظير	-						
القسم	-						
رمز المقرر النظير	-						

معلومات تدريسي المادة

اسم مدرس (مدرسي) المقرر:	جابر زين العابدين ساقي حسن
اللقب العلمي:	-
سنة الحصول على اللقب	-
الشهادة :	ماجستير
سنة الحصول على الشهادة	٢٠٢٣
عدد سنوات الخبرة (تدريس)	١٦

الوصف العام للمقرر

تعريف الطالب على استخدام الرياضيات في المواضيع العلمية الاخرى و زيادة مقدرته على التفكير المنطقي عند حل التمارين وكذلك زيادة مقدرته على التطوير وكيفية ربط المعطيات مع معلوماته للحصول على حل المسألة.

موضوعات المقرر :

- تعريف الطالب باالمقرر ومفرداته .
- المصفوفات – المحددات – تطبيقات كهربائية .
- قوانين ايجاد المتطابقات المثلثية والمعادلات المثلثية.
- الأسس واللوغاريتمات وقوانينها .
- الأعداد المركبة – التمثيل الهندسي للعدد المركب- علاقة الوحدات الكهربائية بالإعداد المركبة ،ايجاد جذور الإعداد المركبة .
- التفاضل –جبر المشتقات – الدوال المتعددة الحدود ومشتقاتها-قاعدة السلسلة-الدالة المركبة-الدالة البارامترية.
- معادلة المماس والعمود – السرعة والتعجيل – حسابات تغير الفولتية والتيار بدلالة الزمن .
- الغايات – غاية الدوال الجبرية والمثلثية – تطبيقات على الغايات .

الاهداف العامة

- العمل على مواكبة العصر، وتفسير تطورات العصر من الناحية العلمية ومن الناحية التكنولوجية كذلك، لأنها تعد لغة العصر، وأسلوبًا علميًا يستطيع عبره البشر التواصل فيما بينهم.
- العمل على استعمال المبادئ التي من دورها تفسير واقع الرياضيات، وإدماج فروعه ومجالاته مع بعضها لفهم الرياضيات وباقي العلوم الأخرى باختلاف أنواعها.
- العمل على تشجيع وتحفيز التفكير بشكل منطقي المبني على الاستنتاجات والبراهين.
- العمل على ربط الرياضيات بمجالات العلوم الأخرى، كالأحياء، والفيزياء، والطب، والكيمياء، والاقتصاد، والزراعة، والصناعة، وغيرها من المجالات الأخرى.
- التنويه إلى دور الرياضيات الكبير في تقدم علم الحاسب الآلي والتكنولوجيا، حيث ساعد الرياضيات في ضبط وبرمجة الحاسوب وبرامجه (نظام العد الثنائي).

الأهداف الخاصة

- اكساب المتعلم مهارات اسس الرياضيات وقوانينها
- إلمام المتعلم بالمصفوفات والمشتقات واللوغارتيمات
- التركيز على حل الامثلة الخاصة باسس الرياضيات وفي نهاية كل محاضرة يوجد نشاط ومهمة

الأهداف السلوكية او نواتج التعلم

بعد الانتهاء من الدرس (المحاضرة) سيكون الطالب قادرا على ان:

- **استخدام الرياضيات في المواضيع العلمية الاخرى**
- **زيادة مقدرته على التفكير المنطقي عند حل التمارين**
- **يميز بين المشتقات والمصفوفات واللوغارتيمات**
- **كيفية ربط المعطيات مع معلوماته للحصول على حل المسالة**

المتطلبات السابقة

كتاب الرياضيات Thomas Calculus

الأهداف السلوكية او مخرجات التعليم الأساسية		
ت	تفصيل الهدف السلوكي او مخرج التعليم	آلية التقييم
1	معرفة الطالب باسس الرياضيات الاساسية.	• المحاضرات • الواجبات الفردية والمشاركة • حلقات النقاش والاختبارات
2	اكتساب الطالب القدرة على حل مسائل المصفوفات واللوغارتيمات والمشتقات	البحث وتطوير المهارة من خلال الابحاث وكتب ومصادر الرياضيات
3	القدرة على تطبيق المصفوفات واللوغارتيمات والمشتقات في المواضيع العلمية	• مشاريع فردية • الاختبارات
4	معرفة الطالب التفاضل،جبر المشتقات ، الدوال المتعددة الحدود ومشتقاتها،قاعدة السلسلة،الدالة المركبة،الدالة البارامترية. وحل الامثلة عليها	• حل التمارين • الانشطة

أساليب التدريس (حدد مجموعة متنوعة من أساليب التدريس لتناسب احتياجات الطلاب ومحتوى المقرر)

الاسلوب او الطريقة	مبررات الاختيار
١-المحاضرات النظرية من خلال الشرح	محدد وواضح ويطبق بسهوله وهو التقليدي
٢. التعلم التفاعلي والمتبادل	التفاعل بين الطلبة
٣. التعلم القائم على حل المسائل الرياضية حتى لو كان بدون مراجعة سابقة للمادة	اكتساب الطالب مهارة حل المسائل من خلال تعلم اسس ومبادئ الرياضيات
٤. المناقشة في نهاية المحاضرة	تقديم الخلاصة والفهم للموضوع

الفصل الاول من المحتوى العلمي						
عنوان الفصل	الوقت					
التوزيع الزمني	النظري	العملي		العنوان الفرعي	طريقة التدريس	التقنيات	طرق القياس
الأسبوع الأول	٢	-	اسس الرياضيات	مقدمة عن المقرر، أهداف التعلم، محتوى المقرر العناوين الفرعية	محاضرة نظري	عرض تقديمي، شرح، أسئلة وأجوبة، مناقشة	عرض الامثلة والمناقشة وملاحظة مستوى الطلبة
الأسبوع الثاني	٢	-	اسس الرياضيات	المصفوفات المحددات تطبيقات كهربائية	محاضرة نظري	**(شرح أسئلة وأجوبة/ مناقشة)**	**عرض الامثلة والمناقشة وملاحظة مستوى الطلبة**
الاسبوع الثالث	٢	-	اسس الرياضيات	المتطابقات المثلثية المعادلات المثلثية	محاضرة نظري	**(شرح أسئلة وأجوبة/ مناقشة)**	**عرض الامثلة والمناقشة وملاحظة مستوى الطلبة**
الاسبوع الرابع	٢	-	اسس الرياضيات	الأسس واللوغاريتمات قوانين اللوغارتمية	محاضرة نظري	**(شرح أسئلة وأجوبة/ مناقشة)**	**عرض الامثلة والمناقشة وملاحظة مستوى الطلبة**
الاسبوع الخامس والسادس	٢	-	اسس الرياضيات	الأعداد المركبة التمثيل الهندسي للعدد المركب التفاضل	محاضرة نظري	**(شرح أسئلة وأجوبة/ مناقشة)**	**عرض الامثلة والمناقشة وملاحظة مستوى الطلبة**

الاسبوع السابع والثامن	٢	-	اسس الرياضيات	علاقة الوحدات الكهربائية بالإعداد المركبةايجاد جذور الإعداد المركبة جبر المشتقات الدوال المتعددة الحدود ومشتقاتها	محاضرة نظري	**(شرح أسئلة وأجوبة/ مناقشة)**	**عرض الامثلة والمناقشة وملاحظة مستوى الطلبة**
الاسبوع التاسع والعاشر	٢	-	اسس الرياضيات	قاعدة السلسلة الدالة المركبة- الدالة البارامترية	محاضرة نظري	**(شرح أسئلة وأجوبة/ مناقشة)**	**عرض الامثلة والمناقشة وملاحظة مستوى الطلبة**
الاسبوع الحادي عشر والثاني عشر	٢	-	اسس الرياضيات	معادلة المماس والعمود السرعة والتعجيل حسابات تغير الفولتية والتيار بدلالة الزمن	محاضرة نظري	**(شرح أسئلة وأجوبة/ مناقشة)**	**عرض الامثلة والمناقشة وملاحظة مستوى الطلبة**
الاسبوع الثالث عشر والرابع عشر	٢	-	اسس الرياضيات	الغايات	محاضرة نظري	**(شرح أسئلة وأجوبة/ مناقشة)**	**عرض الامثلة والمناقشة وملاحظة مستوى الطلبة**

			غاية الدوال الجبرية والمثلثية			
الاسبوع خامس عشر	٢	-	اسس الرياضيات	تطبيقات على الغايات	محاضرة نظري	**(شرح أسئلة وأجوبة/ مناقشة)**	**عرض الامثلة والمناقشة وملاحظة مستوى الطلبة**

الوحدة النمطية للاسبوع الاول والثاني

اولا : النظرة الشاملة

أ – الفئة المستهدفة (Target Population)

طلبة المستوى الاول – قسم تقنيات الالكترونية المعهد التقني / الدور

ب – مبررات الوحدة

تم تصميم هذه الوحدة لكي يتعرف الطالب على التعامل مع اسس الرياضيات وكيفية حل المسائل

ت – الفكرة المركزية (Central Idea)

اولا : التعرف على المصفوفات

ثانيا : التعرف على العمليات على المصفوفات

ثالثا : التعرف على المحددات

رابعا : حل المعادلات الخطية باستخدام المحددات

خامسا : التعرف على المتطابقات

سادسا : حل مسائل اللوغارتيمات

سابعا : تطبيقات على الاعداد المركبة

ث – اهداف الوحدة

سيكون الطالب بعد انتهاء المحاضرة قادرا على ان :

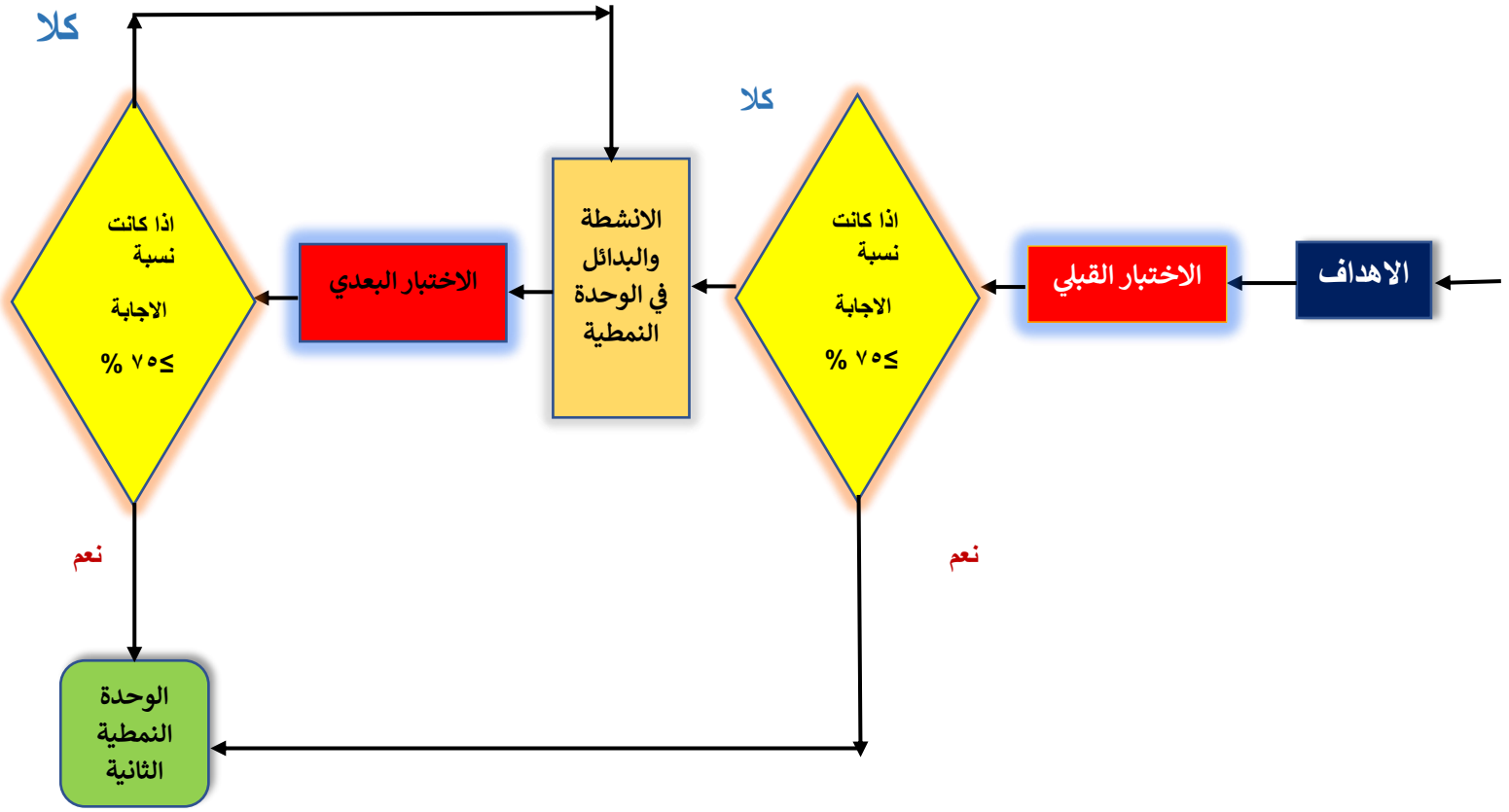
١ – التعرف على المصفوفات وانواع المصفوفات

٢ – العمليات على المصفوفات (تساوي المصفوفات ، جمع المصفوفات ، طرح المصفوفات ، ضرب المصفوفة في عنصر ثابت ، ضرب المصفوفات)

٣ – التعرف على المحددات

٤ – حل المعادلات الخطية باستخدام المحددات (قاعدة كرامر)

ج – مخطط انسيابى للتدريب بواسطة الوحدة النمطية



ثانيا : الاختبار القبلي

ضع دائرة حول العدد الصحيح

١ – اذا كان $A=\begin{matrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{matrix}$ جد $3A$ ، $-5A$

a) $\begin{matrix}10 & -6\\ 15 & -10\end{matrix}$

b) $\begin{matrix}10 & -5\\ -15 & -10\end{matrix}$

٢ – اذا كان $A=\begin{matrix}-1 & 2\\ 3 & 4\end{matrix}$ ، $B=\begin{matrix}1 & -1\\ 4 & 2\end{matrix}$ ، جد ناتج $A*B$

a) $\begin{matrix}-2 & -4\\ 16 & 2\end{matrix}$

b) $\begin{matrix}2 & -6\\ 16 & 3\end{matrix}$

ملاحظة

يرجى التحقق من سلامة اجابتك بمراجعة صفحة (مفاتيح الاجابات على الاختبارات) في نهاية الوحدة. ففي حالة حصولك على نسبة اجابة ١٠٠ % فتكون غير محتاج لدراسة هذه المحاضرة واذهب لدراسة الوجدة الثانية. اما في حالة حصولك على درجة اقل من ١٠٠% فستكون بحاجة لدراسة هذه الوحدة.

ثالثا : عرض الوحدة النمطية

المصفوفات Matrices

المصفوفة : ترتيب معين من العناصر يتكون من عدد من الصفوف **(rows)** يساوي **m** وعدد من الاعمدة **(columns)** يساوي **n** والنظام كله محاط بقوسين بشكل ( ) او [ ] , وتكون اهمية العنصر ليست في قيمته فقط وانما في موقعه ضمن المصفوفة.

مثال المصفوفة **A** ,كما في الشكل ادناه :

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}_{m\times n}$$

وهذه المصفوفة هي بدرجة او سعة $(m\times n)$ ويمثل الرقم **m** عدد الصفوف والرقم **n** عدد الاعمدة .

أنــواع المصفوفـــــــــات

1. **المصفوفة الصفرية** **Null matrix** : هي المصفوفة التي كل عنصر فيها قيمته تساوي صفر .
2. **المصفوفة المربعــة** **Square matrix** : هي المصفوفة التي فيها عدد الصفوف يساوي عدد الاعمدة .
3. **المصفوفة القطريــة** **Diagonal matrix** : وهي مصفوفة مربعة عناصرها الغير قطرية هي أصفار .
4. **المصفوفة الواحدية** **Unite matrix** : وهي مصفوفة مربعه كل عناصرها القطرية تساوي واحد وباقي عناصرها اصفار , ويرمز بالحرف (I) .

مدور (منقول) المصفوفة Transpose of Matrix

المصفوفة **A** ذات السعة $(m\times n)$ يمكن الحصول على مدورها(منقولها) وذلك بابدال الصفوف مكان الاعمدة او بالعكس لنحصل على A^T ذات السعة $(n\times m)$,كما في المثال

$$A^T=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 7 \end{bmatrix}_{2\times 3} \quad \text{منقولها هــو} \Leftarrow \quad A=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

العمليات على المصفوفات

1 . تساوي المصفوفات Equal Matrices :

يمكن القول ان المصفوفتين **A** و **B** متساويتان اذا :

1. كانتا من نفس الدرجة او السعة $(m \times n)$.
2. عناصرها المتناظرة في الموقع متساوية .

مثـــال : جد قيمة العناصر k_1 , k_2 , k_3 لكي تكون المصفوفة **A = B** .

$$A=\begin{bmatrix} 3 & k_1 & 0 \\ -1 & 4 & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ k_2 & k_3 & 4 \end{bmatrix}$$

لكي **A = B** يجب أن يكون : $k_1 = 5 \quad , \quad k_2 = -1 \quad , \quad k_3 = 4$

2 . جمع المصفوفات Addition of Matrices :

إذا كانت **A** و **B** **مصفوفتان بنفس السعة (m × n)** فأن مجموعهما والذي يكتب **A+B = C** هي **مصفوفة بنفس السعة** $C_{m \times n}$ أيضا , عناصرها ناتجة من جمع العناصر في **A** و **B** والمتناظرة في الموقع . كما في المثـــال التالـــــــــــي :

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2+(-1) & (-3)+0 & 5+4 \\ 1+0 & 1+3 & 2+5 \\ 0+2 & 4+1 & 3+(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

خواص جمع المصفوفات:

1-قانون الابدال **Commutative Law** **A+B = B+A**

2-قانون التجميع **Associative Law** **A + (B+C) = (A+B) +C**

3 . طرح المصفوفات Subtraction of Matrices : إذا كانت **A** و **B** مصفوفتان بنفس السعة **(m × n)** فأن حاصل طرحهما والذي يكتب (**D = A - B**) هي مصفوفة بنفس السعة $D_{m \times n}$ أيضا , عناصرها ناتجة من طرح العناصر في **B** **من A** والمتناظرة في الموقع . كما في المثـــال التالـــــــــــي :

$$D = A - B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2-(-1) & -3-0 & 5-4 \\ 1-0 & 1-3 & 2-5 \\ 0-2 & 4-1 & 3-(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

ومن الافضل لإجراء عملية الطرح هو تغيير إشارة عناصر المصفوفة الثانية **(B)** وإجراء عملية الجمع وكما يلـــي : **A − B = A + (− B)**

4 . ضرب المصفوفة في عنصر ثابت :

إذا ضربت مصفوفة ما بعنصر ثابت فأن جميع عناصرها تضرب بذلك العنصر , وكما موضح في المثال التالـــي :

مثـــال : إذا كان ; $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ جـد $3A$, $-5A$.

الحـــل :

$$3A = 3 \times \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\times 1 & 3\times(-2) \\ 3\times 2 & 3\times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$-5A = -5 \times \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 10 \\ -10 & -15 \end{bmatrix}$$

5 . ضرب المصفوفات Multiplication of Matrices :

لتكن المصفوفة $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ولتكن المصفوفة $B = [b_{ij}]_{n\times p}$

يكون حاصل ضرب (**A . B**) ممكنا فقط اذا كان عدد اعمدة المصفوفة الاولى **A** يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية **B** , ويمكن كتابة حاصل الضرب كما يلي :

$$[a_{ij}]_{m\times n} \times [b_{ij}]_{n\times p} = [C_{ij}]_{m\times p}$$

مثـــال (1) :

$$A.B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times(-1)+(-1)\times 2 & 2\times 1+(-1)\times 4 \\ 4\times(-1)+3\times 2 & 4\times 1+3\times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 2 & 16 \end{bmatrix}$$

مثـــال (2) :

$$A.B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 3} . \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

$$= \begin{bmatrix} 0\times 1+1\times(-1)+2\times 2 & 0\times(-2)+1\times 0+2\times(-1) \\ 1\times 1+2\times(-1)+3\times 2 & 1\times(-2)+2\times 0+3\times(-1) \\ 2\times 1+3\times(-1)+4\times 2 & 2\times(-2)+3\times 0+4\times(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -5 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

خواص ضرب المصفوفات :

1) $A \cdot B \neq B \cdot A$
2) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
3) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
4) $A \cdot I = I \cdot A = A$ I هي المصفوفة الواحدية

تمارين محلولة

مثال (1) : اذا كانت المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, جد : A^2 , A^3

الحل :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 2+1\times 0 & 2\times 1+1\times(-1) \\ 0\times 2+(-1)\times 0 & 0\times 1+(-1)\times(-1) \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\times 2+1\times 0 & 4\times 1+1\times(-1) \\ 0\times 2+1\times 0 & 0\times 1+1\times(-1) \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

مثال (2) : اوجد قيم **x , y , z** في المصفوفتين المتساويتين :

$$\begin{bmatrix} x+3 & 2y+x \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ z-1 & 6 \end{bmatrix}$$

الحل : اذا تساوت مصفوفتان , تساوت عناصرهما المتناظرة في الموقع .

$$x+3=0 \implies x=-3$$

نعوض عن x بـ **(-3)**

$$2y+x=-1$$

$$2y-3=-1 \implies 2y=2 \implies y=1$$

$$3=z-1 \implies z=4$$

مثال(3) :

أوجد مصفوفة $f(A)$ اذا كان $f(x)=x^2-2x+3$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

الحـــل:

$$f(A) = A^2 - 2A + 3A^0$$

$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 4 & 7 \\ -1 & 21 & 5 \\ 16 & -3 & 17 \end{bmatrix}$$

رابعا : الاختبار البعدي

ضع دائرة حول الاجابة الصحيحة لكل مما ياتي :

١ – اذا كانت A , B مصفوفتان جد ناتج طرحهما $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

(a $\begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

(b $\begin{bmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

٢ – اوجد قيم X , Y , Z في المصفوفتين المتساويتين $\begin{bmatrix} X+3 & 2Y+X \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ Z-1 & 6 \end{bmatrix}$

أ- X = 3
Y = -1
Z = 4

ب- X = -3
Y = 1
Z = 4

مفاتيح الاجابة على الاختبارات

الاختبار القبلي		الاختبار البعدي	
رقم السؤال	الاجابة الصحيحة	رقم السؤال	الاجابة الصحيحة
١	A	١	A
٢	B	٢	B

الوحدة النمطية للاسبوع الثالث والرابع والخامس والسادس

اولا : النظرة الشاملة

أ – الفئة المستهدفة (Target Population)

طلبة المرحلة الاولى – قسم تقنيات الالكترونية المعهد التقني / الدور

ب – مبررات الوحدة

تم تصميم هذه الوحدة لكي يتعرف الطالب على المحددات وحل المعادلات الخطية باستخدام المحددات والنسب المثلثية والمتطابقات.

ت – الفكرة المركزية (Central Idea)

اولا : التعرف على المحددات

ثانيا : حل المعادلات الخطية باستخدام المحددات

ثالثا : حل الامثلة على النسب المثلثية

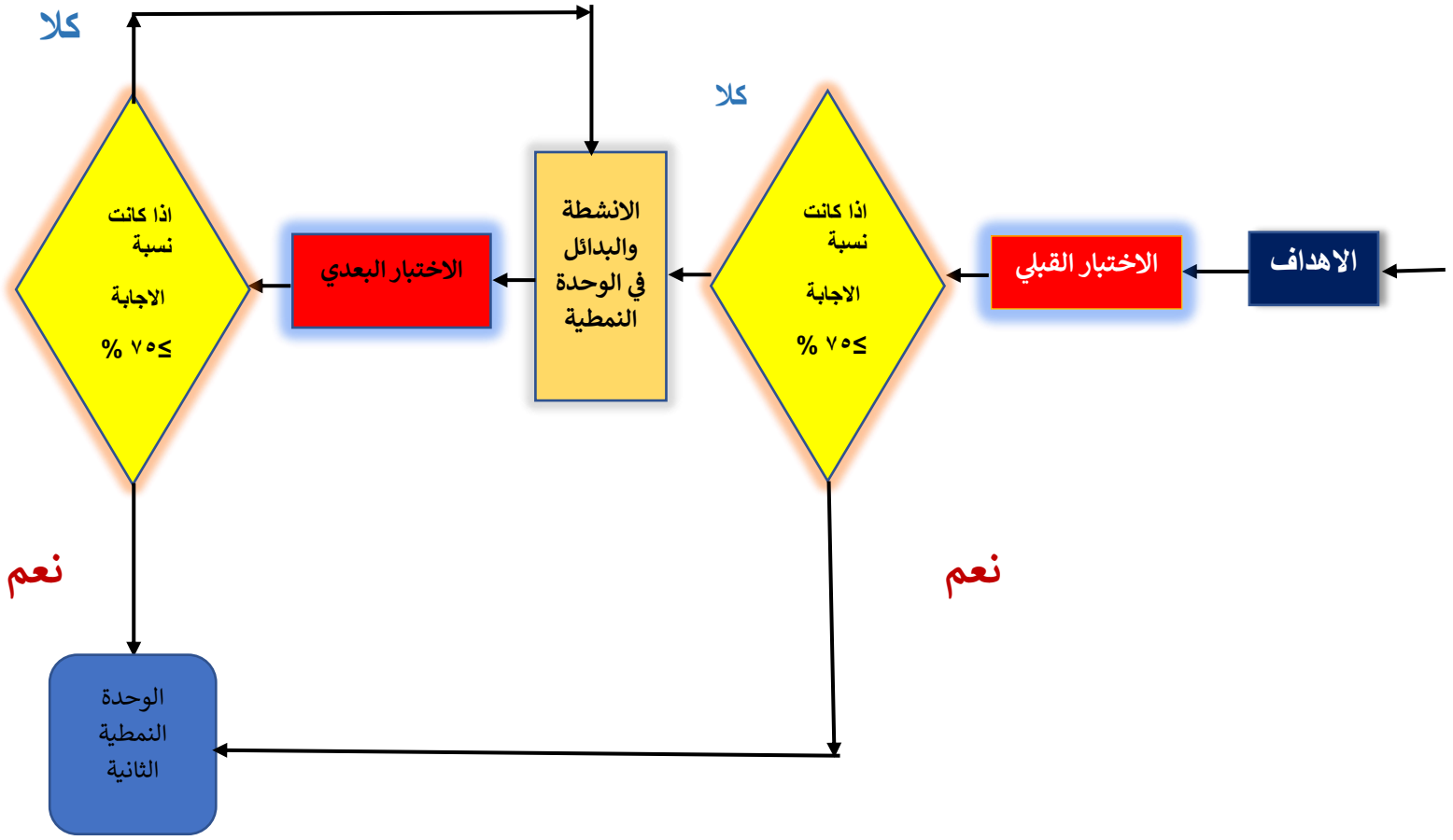
رابعا : حل مسائل المتطابقات

ث – اهداف الوحدة

سيكون الطالب بعد انتهاء المحاضرة قادرا على ان :

١. التعرف على انواع المحددات
٢. حل الامثلة للمعادلات الخطية باستخدام المحددات
٣. حل المسائل للنسب المثلثية
٤. حل الامثلة في المتطابقات

ج – مخطط انسيابي للتدريب بواسطة الوحدة النمطية



ثانيا : الاختبار القبلي

ضع دائرة حول الاجابة الصحيحة لكل مما ياتي :

١- اذا كانت قيمة المحدد A تساوي صفرا، جد قيمة X . $A = \begin{matrix} X & 4 \\ 1 & -2 \end{matrix} = 0$

(a X = -2
(b X = -3
(c X = 4

٢ – جد قيمة A للمحدد الثلاثي التالي بطريقة التجزئة $A = \begin{matrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{matrix}$

(a ٢-
(b ١-
(c ٣

ملاحظة

يرجى التحقق من سلامة اجابتك بمراجعة صفحة (مفاتيح الاجابات على الاختبارات) في نهاية الوحدة. ففي حالة حصولك على نسبة اجابة ١٠٠ % فتكون غير محتاج لدراسة هذه المحاضرة واذهب لدراسة الوحدة الثانية. اما في حالة حصولك على درجة اقل من ١٠٠% فستكون بحاجة لدراسة هذه الوحدة.

المصفوفة الواحدية $= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

$$A^0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix}^0$$

$$f(A) = \begin{bmatrix} 22 & 4 & 7 \\ -1 & 21 & 5 \\ 16 & -3 & 17 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 22 & 4 & 7 \\ -1 & 21 & 5 \\ 16 & -3 & 17 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -2 & -6 \\ -6 & 8 & -2 \\ -10 & -4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 2 & 1 \\ -7 & 32 & 3 \\ 6 & -7 & 20 \end{bmatrix}$$

المحـــــددات Determinants

يقابل كل مصفوفة مربعة (أي أن : عدد الصفوف = عدد الأعمدة) والتي عناصرها أعداد حقيقية , يقابلها عدد حقيقي يسمى *محدد المصفوفة* ويرمز لـه بـ **(det A)** أو $|A|$, ويكتب بالصيغة التالية :

محدد ثلاثي $|A| = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}_{3\times 3}$, **محدد ثنائي** $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}_{2\times 2}$

مثـال(1) :جد قيمة المحدد التالي: $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 2\times 8 - (3\times 5) = 1$

مثـال(2) :اذا كانت قيمة المحدد $|A|$ تساوي صفرا, جد قيمة x . $A = \begin{vmatrix} x & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$

الحل : $|A| = x(-2) - (1\times 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad -2x = 4 \quad \Rightarrow \quad x = -2$

•• حساب قيمـة المحـدد الثلاثي ••

طريقة التحزئة :- لايجاد قيمة المحدد الثلاثي نختار احد الصفوف او الاعمدة ونقوم بضرب كل عنصر من عناصر ذلك الصف او العمود في المحدد المساعد له Cofactor والذي ينتج

بعد حذف عناصر الصف والعمود الذي يقع فيه ذلك العنصر . ثم نقوم بجمع ناتج الضرب بعد ملاحظة قانون الاشارات الموضح في الرسم التالي :

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

مثـــال(3) : جد قيمة $|A|$ للمحدد الثلاثي التالي بطريقة التجزئة :

$$A=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

الحل : لسهولة الحل يفضل اختيار الصف او العمود الذي يحتوي اصفار او ارقام صغيرة وعليه نختار التجزئة بالصف الثاني :.

$$A=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}+(0)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 1[6-(-1)]+0[6-3]+1[-2-6]=7+0-8=-1$$

مثال (4) : جد قيمة (x) في المحدد التالي : $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x & 3 & -4 \end{vmatrix}=0$

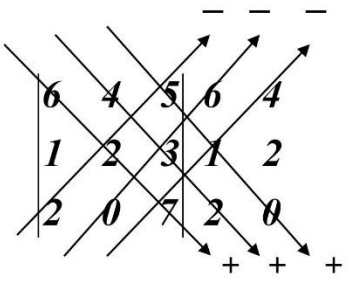
نختار التجزئة بالصف الثاني $-2\begin{vmatrix} 2 & -x \\ 3 & -4 \end{vmatrix}-1\begin{vmatrix} 3 & -x \\ x & -4 \end{vmatrix}-3\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ x & 3 \end{vmatrix}=0$

$$=-2[-8+3x]-[-12+x^2]-3[9-2x]=0$$

$$=16-6x+12-x^2-27+6x=0 \quad \Rightarrow \quad x=\pm 1$$

2 . الطريقة الخاصة : هناك طريقة خاصة لا يجاد قيمة المحدد الثلاثي فقط , تتلخص بإضافة ما يعادل عمودين الى الجهة اليمنى للمحدد ثم نتبع طريقة ضرب الاقطار مع ملاحظة اشارات الاسهم وكما في المثال التالي :

$$D_3=\begin{vmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix} =$$



=6 ×2 ×7 + 4 × 3 ×2 + 5 ×1× 0 –(2 × 2 ×5) – (0 × 3 × 6) – (7×1×4) = 60

حـل المعادلات الخطيـة باستـخدام المحددات(قـاعـدة گـرامـر)

لحل المعادلات الخطية الانية باستخدام المحددات (طريقة گرامر) اولآ وقبل كل شـيء نرتب المعادلات بحيث نجعل المجاهيل بالترتيب في جهة والحد المطلق (الثوابت)في الجهة الاخرى من المعادلة كما في الصيغة العامة التالية :

$$a_1x + a_2y + a_3z = d_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$b_1x + b_2y + b_3z = d_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$c_1x + c_2y + c_3z = d_3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

نضع معاملات المجاهيل في محدد نسميه **D** :

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

بشرط **D ≠ 0**

الان لإيجاد قيمة المجهول x نقوم بحذف معاملات x وابدالها بعمود الثوابت كما يلي :

$$D_x = \begin{vmatrix} d_1 & a_2 & a_3 \\ d_2 & b_2 & b_3 \\ d_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

ونحصل على قيمة x من قسمة D_x على D : $x = \dfrac{D_x}{D}$

وبنفس الطريقة نجد قيم كل من z , y : $z = \dfrac{D_z}{D}$, $y = \dfrac{D_y}{D}$

تـمـاريـن مـحـلـولـة

مثـال (1) : حـل المعادلتين الانيتين باستخدام المحددات(طريقة گرا مر) ثم تحقق من صحة الناتج : $4x + 3y + 17 = 0$, $3x - 5y - 9 = 0$

الحـل : اولآ نرتب الحدود :

$$3x - 5y = 9 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$4x + 3y = -17 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 9 - (-20) = 29$$

D ≠ 0

$$D_x = \begin{vmatrix} 9 & -5 \\ -17 & 3 \end{vmatrix} = 27 - 85 = -58 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{D_x}{D} = \frac{-58}{29} = -2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 4 & -17 \end{vmatrix} = -51 - 36 = -87 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-87}{29} = -3$$

للتحقق من صحة الناتج, نعوض عن قيم x , y في المعادلة **(1)** :

الصفحة 8

$$3(-2)-5(-3)=-6+15=9$$

مثـــال (2) : حـل المعادلات التالية **بطريقة گرا مر** :

$$x+y=1-z \quad , \quad 2x+z=y \quad , \quad 2y+x-z=4$$

$$x+y+z=1.....(1)$$
$$2x-y+z=0.....(2)$$
$$x+2y-z=4.....(3)$$

الحـــل : اولآ نرتب الحدود :

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1 & 2 & -1\\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2\end{vmatrix}=1+1+4-(-2)-2-(-1)=7$$

$$D_x=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 4 & 2 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1\\ 4 & 2 & -1 & 4 & 2\end{vmatrix}=1+4+0-0-2-(-4)=7$$

$$D_y=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 4 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0\\ 1 & 4 & -1 & 1 & 4\end{vmatrix}=0+1+8-(-2)-4-0=7$$

$$D_z=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 0 & 2 & -1\\ 1 & 2 & 4 & 1 & 2\end{vmatrix}=-4+0+4-8-0-(-1)=-7$$

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{7}{7}=1 \quad , \quad y=\frac{D_y}{D}=\frac{7}{7}=1 \quad , \quad z=\frac{D_z}{D}=\frac{-7}{7}=-1$$

مثـــال (3) : حـل المعادلات التالية **بطريقة گرا مر** :

$$2x-y=3-3z \quad , \quad y+2=0 \quad , \quad 2x+y+z=1$$

$$2x - y + 3z = 3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$y = -2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$2x + y + z = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

الحـــل : اولآ نرتب الحدود :

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = [2 - 6] = -4$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 0 + (-6) - 2 - 0 - 3 = -8$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 4 + 0 - 0 - (-4) - 6 = 4$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-8}{-4} = 2 \quad , \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{4}{-4} = -1$$

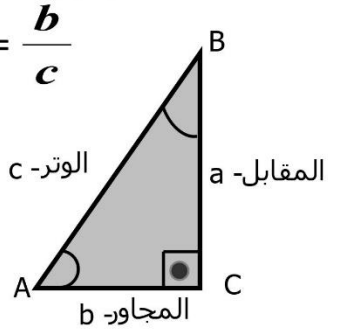
النسب المثلثية Trigonometric

المثلث **ABC** القائم الزاوية في **C** :

$$\sin A = \frac{a}{c} \quad , \quad \cos A = \frac{b}{c}$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{a}{b}$$

$$\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{b}{a}$$



$$\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} = \frac{c}{a} \quad , \quad \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{c}{b}$$

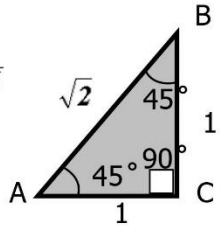
•• النسب المثلثية الخاصة ••

الزوايا الخاصة هي : (0° , 30 ° , 45 ° , 60 ° , 90 °)

1. **< 45 °**

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45^\circ = 1 \quad , \quad \cot 45^\circ = 1$$

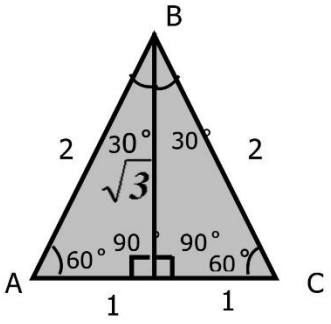


2. **< 30° , 60°** : $\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ$$

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \cot 60^\circ$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3} = \cot 30^\circ$$



$$\sin 0^\circ = 0 = \cos 90^\circ$$

$$\cos 0^\circ = 1 = \sin 90^\circ$$

3. $\cot 0^\circ = \infty = \tan 90^\circ$

$$\tan 0^\circ = \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0 = \cot 90^\circ \quad , \quad \tan 90^\circ = \frac{\sin 90^\circ}{\cos 90^\circ} = \frac{1}{0} = \infty$$

ملاحظات مهمة في النسب المثلثية :

مجموع الزوايا الداخلية لأي مثلث تساوي **180** °

تقرأ الزوايا بالموجب عندما تكون **عكس** حركة عقارب الساعة

وتقرأ الزوايا بالسالب عندما تكون **باتجاه** حركة عقارب الساعة

القيمة العظمى والصغرى لجيب الزاوية **(sin)** كما يلي : $-1 \le \sin \le +1$

القيمة العظمى والصغرى لجيب تمام الزاوية **(cos)** كما يلي : $-1 \le \cos \le +1$

مثال(1) : جد ناتج ما يأتي :

الحل :

$$\sin 210 + \cos 330 - \tan 135$$

$$= \sin(180+30) + \cos(-30) - \tan(180-45)$$

$$= -\sin 30 + \cos 30 - (-\tan 45)$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - (-1) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

المتطابقات Identities :-

المتطابقات هي المعادلات التي تصح لجميع القيم الممكنة للمتغير عكس المعادلات التي تكون صحيحة لبعض قيم المتغير ولا تصح لغيرها . وعندما يكون المتغير في المتطابقة قياس زاوية لدالة مثلثية تسمى **(متطابقة مثلثية)** . ولاجل البرهنة على صحة أي متطابقة مثلثية نحاول ان نجعل احد طرفيها يساوي بالنتيجة الطرف الاخر وذلك بالاعتماد على المتطابقات الاساسية للمثلثات وهي :

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \Rightarrow \sec^2\theta=\tan^2+1 \Rightarrow \csc^2\theta=\cot^2\theta+1$$

متطابقات مجموع قياس زاويتين او الفرق بينهما :

$$\sin(a+b)=(\sin a)(\cos b)+(\cos a)(\sin b)$$
$$\sin(a-b)=(\sin a)(\cos b)-(\cos a)(\sin b)$$
$$\cos(a+b)=(\cos a)(\cos b)-(\sin a)(\sin b)$$
$$\cos(a-b)=(\cos a)(\cos b)+(\sin a)(\sin b)$$
$$\sin(2a)=2(\sin a)(\cos a) \quad , \quad \cos(2a)=\cos^2 a-\sin^2 a$$
$$\cos^2 a=\frac{1+\cos(2a)}{2} \quad , \quad \sin^2 a=\frac{1-\cos(2a)}{2}$$

بالاضافةالى قوانين النسب المثلثية

أمثلة محلولـــــة

مثال (1): برهن صحة المتطابقة التالية :- $\tan^2\theta-\sin^2\theta=\tan^2\theta(\sin^2\theta)$

الحل : نبرهن ان احد طرفي المتطابقة يساوي الطرف الاخر .

نبدأ بالطرف الايسر

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-\sin^2\theta=\frac{\sin^2\theta-\sin^2\theta(\cos^2\theta)}{\cos^2\theta}$$
$$=\frac{\sin^2\theta(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta}=\tan^2\theta\sin^2\theta \quad \surd$$

مثال(2): برهن صحة المتطابقة : $\sin\theta\sqrt{\csc^2\theta-1}=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$

الحل: لأجل البرهنة على صحة المتطابقة نحاول ان نغير طرفي المتطابقة الى صيغة واحدة ونبدأ بالطرف الايسر :

$$\sin\theta\sqrt{\csc^2\theta-1}=\sin\theta\sqrt{\cot^2\theta}=\sin\theta(\cot\theta)=\sin\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\cos\theta$$

الطرف الايمن : $\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{\sec^2\theta}} = \frac{1}{\sec\theta} = \cos\theta$ √

مثال(3): برهن صحة المتطابقة : $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = 2\sec\theta - \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

الحل: نبدأ بالطرف الايمن : $2\sec\theta - \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{2}{\cos\theta} - \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

[نضرب البسط والمقام × $\frac{1+\sin\theta}{1+\sin\theta}$] $\frac{2-1-\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$

$\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} \times \frac{1+\sin\theta}{1+\sin\theta} = \frac{1-\sin^2\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)} = \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)} = \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$ √

••المعـــادلات المثلثـــة••

1)حل المعادلة المثلثية التالية : $6\sin^2 x - 5\sin x + 1 = 0 \quad 0 \le x \le 180$

الحل: لحل المعادلة نحلل الى العوامل الاولية بالتجربة :

$(3\sin x - 1)(2\sin x - 1) = 0$

$3\sin x = 1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 19.47^\circ$

Either

Or $2\sin x = 1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 30^\circ$

بما ان اشارة (sin x) موجبة في الحالتين , والمطلوب قيم x في الربع الاول والثاني $(0 \le x \le 180)$ نبحث عن قيم x في الربع الثاني التي لها نفس قيمة الجيب للزاويتين (30° , 19.47°) :

$x = 180 - 30 = 150^\circ$ $\quad x = 180 - 19.47 = 160.53^\circ$

مجموعة الحل للمعادلة : $\{160.53^\circ , 150^\circ , 19.47^\circ , 30^\circ\}$

2)حل المعادلة المثلثية التالية : $8\sin^2 x + 6\cos x - 9 = 0 \quad 0 \le x \le 180$

الحل: **نجعل النسب المثلثية في المعادلة متشابهة بأن** نحول $\sin^2 x$ الى $\cos^2 x$:

بما أن: $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ اذن يمكن ان تكتب المعادلة :

$8(1-\cos^2 x) + 6\cos x - 9 = 0 \Rightarrow 8 - 8\cos^2 x + 6\cos x - 9 = 0$

نضرب × (-1) : $8\cos^2 x - 6\cos x + 1 = 0$ اذن : $(4\cos x - 1)(2\cos x - 1) = 0$

رابعا : الاختبار البعدي

ضع دائرة حول الاجابة الصحيحة لكل مما ياتي :

١. حل المعادلتين الاتيتين باستخدام المحددات (طريقة كرامر) ثم تحقق من صحة الناتج :

$4X + 3Y + 17 = 0$. $3X - 5Y - 9 = 0$

a) $X = 2 , Y = 3$

b) $X = -2 , Y = -3$

ت – مفاتيح الاجابة على الاختبارات

الاختبار القبلي		الاختبار البعدي	
رقم السؤال	الاجابة الصحيحة	رقم السؤال	الاجابة الصحيحة
١	a	١	b
٢	b		

الوحدة النمطية للاسبوع السابع والثامن والتاسع والعاشر والحادي عشر وثاني عشر وثالث عشر والرابع عشر والخامس عشر

اولا : النظرة الشاملة

أ – الفئة المستهدفة (Target Population)

طلبة المرحلة الاولى – قسم تقنيات الالكترونية المعهد التقني / الدور

ب – مبررات الوحدة

تم تصميم هذه الوحدة لكي يتعرف الطالب على المعادلات المثلثية وقوانين الاسس واللوغارتيمات والاعداد المركبة وعمليات الاعداد المركبة والضرب والرفع والطرح للاعداد المركبة وايجاد الجدور للاعداد المركبة وتطبيقات على الاعداد المركبة والدوال.

ت – الفكرة المركزية (Central Idea)

اولا : التعرف على المعادلات المثلثية وقوانين الاسس واللوغارتيمات

ثانيا : حل المعادلات الاعداد المركبة وعمليات الاعداد المركبة والضرب والرفع والطرح للاعداد المركبة

ثالثا : حل الامثلة وايجاد الجدور للاعداد المركبة

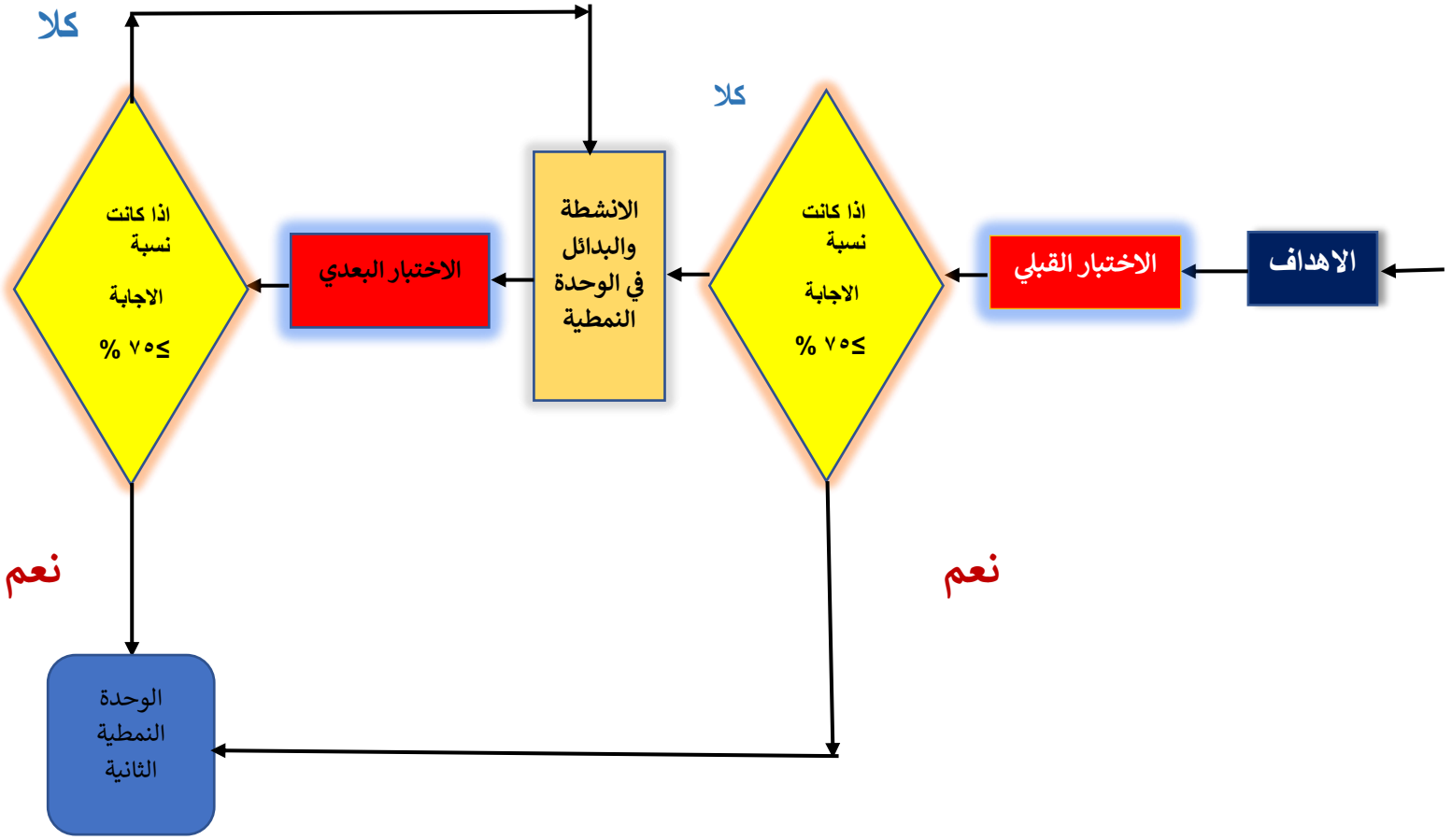
رابعا : حل مسائل تطبيقات على الاعداد المركبة والدوال

ث – اهداف الوحدة

سيكون الطالب بعد انتهاء المحاضرة قادرا على ان :

٢. التعرف على المعادلات المثلثية وقوانين الاسس واللوغارتيمات
٣. حل الامثلة للمعادلات الاعداد المركبة وعمليات الاعداد المركبة والضرب والرفع والطرح للاعداد المركبة
٤. حل المسائل الجدور للاعداد المركبة
٥. حل الامثلة في تطبيقات على الاعداد المركبة والدوال

ج – مخطط انسيابي للتدريب بواسطة الوحدة النمطية



ثانيا : الاختبار القبلي

ضع دائرة حول الاجابة الصحيحة لكل مما ياتي :

١- جد قيمة (X) في كل مما ياتي $\log_{\sqrt{3}} 81 = X$

٢- X = 8
٣- X = -6
٤- X = 4

٢ – جد قيمة (X) $\log_3(2X + 1)$

(a X = 8
(b X = 4
(c X = 6

٣ – جد قيمة (X,Y) التي تحقق المعادلة $(X - Y - 6) + (Y^2 - X) = 0$

(a X = 10 , Y = 4
(b X = 9 , Y = 3

٤ – بين منطلق الدالة domain ومداها range في كل من الدوال التالية ، ثم احسب : *f(-1) , f(0)* , *f(2)* لكل منهما

(a ٧ ، ١ ، ٢-
(b ٦ ، ٤ ، ٣

ملاحظة

يرجى التحقق من سلامة اجابتك بمراجعة صفحة (مفاتيح الاجابات على الاختبارات) في نهاية الوحدة. ففي حالة حصولك على نسبة اجابة ١٠٠ % فتكون غير محتاج لدراسة هذه المحاضرة واذهب لدراسة الوجدة الثانية. اما في حالة حصولك على درجة اقل من ١٠٠% فستكون بحاجة لدراسة هذه الوحدة.

Either $4\cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = 75.5^\circ$

or $2\cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ$

بما أن اشارة **cos x** موجبة في الحالتين والمطلوب في السؤال قيم **x** في الربع الاول والثاني $0 \le x \le 180$ وحيث انه لايوجد جيب تمام موجب في الربع الثاني , اذن مجموعة الحل للمعادلة هي زوايا الربع الاول فقط : $\{ 60^\circ \ , \ 75.5^\circ \}$

3)حل المعادلة التالية : $\cos 2x + 3\cos x = 1 \qquad 0 \le x \le 360^\circ$

الحـــل: بما ان : $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$\cos 2x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$$

$$2\cos^2 x - 1 + 3\cos x - 1 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$$

$$(\cos x + 2)(2\cos x - 1) = 0$$

Either $\cos x = -2$ يهمل $[-1 \le \cos \le +1]$

or $2\cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ$

بما ان اشارة ال **cos** موجبة والمطلوب قيم **x** في الارباع الاربعة $0 \le x \le 360^\circ$ وحيث انه لا يوجد **cos** موجب الا في الربعين الاول والرابع , اذن نبحث عن زوايا مجموعة الحل في الربع الاول والرابع :

في الربع الرابع $x = 360 - 60 = 300^\circ$, في الربع الاول $x = 60^\circ$

4)حل المعادلة التالية : $3\sec^2 x - 3\tan x - 9 = 0 \qquad 0 \le x \le 360^\circ$

الحل : **نجعل النسب المثلثية في المعادلة متشابهة:** $3(\tan^2 x + 1) - 3\tan x - 9 = 0$

$$3\tan^2 x - 3\tan x - 6 = 0 \Rightarrow (3\tan x + 3)(\tan x - 2) = 0$$

Either $3\tan x + 3 = 0 \Rightarrow \tan x = -1 \qquad x = 135^\circ$

Or $\tan x - 2 = 0 \Rightarrow \tan x = 2 \qquad x = 63.43^\circ$

اشارة tan x كانت مرة موجبة ومرة سالبة,والمطلوب زوايا مجموعة الحل في الارباع الاربعة:

ظل الزاوية سالب في الربع الثاني والرابع: $x = 180 - 45 = 135^\circ$, $x = 360 - 45 = 315^\circ$

ظل الزاوية موجب في الربع الاول والثالث : $x = 63.43^\circ$, $x = 180 + 63.43 = 243.43^\circ$

اذن مجموعة الحل هي : $\{ 63.43^\circ \ , \ 135^\circ \ , \ 243.43^\circ \ , \ 315^\circ \}$

●● Laws of Indices | ●●قوانيــن الاسس

1) $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$

2) $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$

3) $(x^a)^b = x^{a\times b}$, $(x^a \cdot y^b)^c = x^{a\times c} \cdot y^{b\times c}$

4) $x^{\frac{a}{b}} = \sqrt[b]{x^a}$

5) $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$, $x^a = \frac{1}{x^{-a}}$

6) $x^0 = 1$

أمثلة محلولة :

— اختصر المقادير التالية :

$$\sqrt[3]{\frac{125}{8000}} = \sqrt[3]{\frac{5^3}{20^3}} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

— $4\sqrt{2} + \sqrt{8} - \sqrt{18} = 4\sqrt{2} + \sqrt{4\times 2} - \sqrt{9\times 2} =$

$4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = \sqrt{2}(4+2-3) = 3\sqrt{2}$

حل المعادلات التالية :

— $x^{\frac{1}{3}} = 8$ نجعل أس المتغير واحد برفع طرفي المعادلة الى الأس 3

$\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 8^3 \Rightarrow x = 512$

— $\frac{e^{2t-3}}{e} = 1 \Rightarrow e^{2t-3} = e$

$\therefore 2t-3 = 1 \Rightarrow \therefore t = 2$ اذا تساوت الاساسات تساوت الاسس

— $125^x = 5^{x+\frac{1}{2}}$

$5^{3x} = 5^{x+\frac{1}{2}}$ اذا تساوت الاساسات تساوت الاسس

$3x = x + \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$

بما أن : $a^0 = 1$

$\because \quad a^{x-1} = a^0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$ $\quad \therefore \quad a^{x-1}=1$

●●اللوغاريتمات Logarithms●●

لوغاريتم العدد **x** هـو **الاس** الذي اذا رفعنا اليه الاساس **a** نحصل على **x** :

$$\log_a x = b \qquad (a \neq 1 \ , \ a > 0 \ , \ x > 0)$$

$$a^b = x$$

وبصورة عامة يمكن وضع الاعداد بصورتين , صورة أسية و صورة لوغاريتمية:

$$\log_2 32 = 5 \iff 2^5 = 32$$

قوانين اللوغاريتمات :

$$\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{\log_a x}{n}$$

$$\log_a a = 1 \ , \quad \ln e = 1$$

$$\log_{10} 1 = 0 \ , \quad \ln 1 = 0$$

$$10^{\log a} = a \ , \quad e^{\ln a} = a$$

اللوغاريتمات العشرية: وهي اللوغاريتمات للأساس **10** وهي كثيرة الاستعمال وقد اتفق على عدم كتابة الاساس **10** عند استعمالها.

اللوغاريتمات الطبيعية: وهي اللوغاريتمات للأساس e حيث ان :

$$e = \lim_{n \to \infty} (1+\frac{1}{n})^n \Rightarrow e = 2.71828$$

وهي كثيرة الاستعمال في التفاضل والتكامل , ويرمز لها بـ $\ln$

$$y = \log_e x \Rightarrow y = \ln x$$

لتحويل اللوغاريتم لأي اساس الى الاساس **10** او الى الاساس **e** نستعمل القانون التالي :

$$\log_a x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} a} = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$\log_e x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} e} = \frac{\log_{10} x}{0.4343} \quad \Rightarrow \quad \therefore \ln x = 2.3 \log_{10} x$$

امثلة محلولة :

جد قيمة(**x**)في كل مما يلي :

1) $\log_{\sqrt{3}} 81 = x$

$$\left(\sqrt{3}\right)^x = 81 \quad \Rightarrow \quad (3)^{\frac{x}{2}} = 3^4$$

$$\therefore \frac{x}{2} = 4 \quad \Rightarrow \quad x = 8$$

اذا تساوت الاساسات تساوت الاسس :

2) $\log_3(2x+1) = 2 \quad \Rightarrow \quad 2x+1 = 3^2 \quad \Rightarrow \quad x = 4$

3) $2\ln x - \ln(5-4x) = 0$

بما ان : $\ln 1 = 0$

$$\therefore \ln \frac{x^2}{5-4x} = \ln 1 \quad \Rightarrow \quad \therefore \frac{x^2}{5-4x} = 1$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x+5)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = -5 \quad , \quad x = 1$$

4) $30 = e^x$

نأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس **e** :

$$\ln 30 = x \ln e \quad \Rightarrow \quad \therefore x = \ln 30 = 3.401$$

5) $e^{3x} = 2e^x$

$$\frac{e^{3x}}{e^x} = 2 \quad \Rightarrow \quad e^{2x} = 2$$

الان نأخذ لوغاريتم الطرفين للاساس **e**:

$$2x \ln e = \ln 2 \quad \Rightarrow \quad \therefore x = \frac{\ln 2}{2} = 0.347$$

6) $\log_2(x^2 + 5x + 2) = 4 \quad \Rightarrow \quad 2^4 = x^2 + 5x + 2$

$$x^2 + 5x - 14 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x+7)(x-2) = 0$$

$$x = -7 \quad , \quad x = 2$$

الاعـــــداد المركبـــة Complex Numbers

عند حل بعض معادلات الدرجة الثانية باستخدام قانون الدستور, قد نحصل على حل يتضمن جذور تربيعية لأعداد سالبة , كما في المعادلة التالية : $x^2 + 2x + 2 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm \frac{\sqrt{-4}}{2}$$

ومن المعلوم ان مربع كل من الاعداد الموجبة والسالبة ناتجه موجب :

$$(2)^2 = 4 \quad , \quad (-2)^2 = 4$$

اذن لا يوجد عدد حقيقي من جذر تربيعي لعدد سالب .

ولأجل حل مثل هذه المعادلات نعتمد على فكرة الاعداد المركبة , ويمكننا الان ان نجد حلا للمعادلة اعلاه باستخدام وحدة الاعداد الخيالية (j), والتي تساوي : $j = \sqrt{-1}$

$$x = -1 \pm \frac{\sqrt{4 \times (-1)}}{2} = -1 \pm \frac{2\sqrt{-1}}{2} \quad \Rightarrow \quad \therefore \; x = -1 + j \quad , \quad x = -1 - j$$

ان هذا النوع من الاعداد يسمى الاعداد المركبة (**Z**) وصيغته الجبرية هي: $Z = x + jy$

ويتكون العدد المركب من جزئين هما : الجزء الحقيقي ويرمز له R_Z ويتمثل بالعدد x .

الجزء الخيالي ويرمز له I_Z ويتمثل بالعدد y .

حيث ان كل من (x, y) عددان حقيقيان , و j هي وحدة الاعداد الخيالية وتساوي $j = \sqrt{-1}$

$$j^2 = -1 \quad , \quad j^3 = j^2 . j = (-1).j = -j \quad , \quad j^4 = j^2 . j^2 = (-1)(-1) = 1$$

مثـال : اكتب العدد المركب $Z = (-1, 5)$ بالصيغة الجبرية .

الحـل : $Z = x + jy \quad \Rightarrow \quad x = R_Z = -1 \quad , \quad y = I_Z = 5$

$$\therefore \quad Z = -1 + j5$$

الخاصة الأولى : يكون العدد المركب **(Z)** مساويا للصفر , إذا كان كل من جزئيه الحقيقي والخيالي يساوي صفر .

$$Z = x + jy = 0 \quad \Rightarrow \therefore \; x = 0 \quad , \quad y = 0$$

الخاصة الثانية: يتساوى العددان المركبان فقط إذا تساوى جزئيهما الحقيقيان وتساوى جزئيهما الخياليان . فإذا كان :

$$x_1 + jy_1 = x_2 + jy_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 \quad , \quad y_1 = y_2$$

مثـــال : جد قيمة x , y التي تحقق المعادلة: $(x - y - 6) + j(y^2 - x) = 0$

الحل : بموجب الخاصية الاولى :

$$x-y-6=0 \quad \text{----------}(1)$$
$$y^2-x=0 \quad \text{----------}(2)$$

من المعادلة **(1)** نحصل على $x=y+6$, نعوض قيمة x في المعادلة **(2)** :

$$y^2-(y+6)=0 \quad \Rightarrow \quad y^2-y-6=0$$

$$(y-3)(y+2)=0 \quad \Rightarrow \quad y_1=3 \ , \ y_2=-2 \ , \ x_1=9 \ , \ x_2=4$$

•• مـرافق العدد المركـب ($\overline{Z}$) Complex Conjugate ••

إن مرافق العدد المركب $Z=x+jy$ والذي يرمز له $\overline{Z}$ هـو :

$\overline{Z}=x-jy$ إي أنه ينتج بتغيير إشارة الجزء الخيالي للعدد المركب .

امثلـــة :

مرافق العـدد : $Z=2-j3$ هـو $\overline{Z}=2+j3$

مرافق العـدد : $Z=2$ هـو $\overline{Z}=2$ مرافق العدد الحقيقي هـو نفسه

مرافق العـدد : $Z=-j2$ هـو $\overline{Z}=j2$

•• القيمـة المطلقة للعدد المركب $|Z|$ Absolute Value ••

$$Z=x+jy \quad \Rightarrow \quad |Z|=|x+jy|=\sqrt{x^2+y^2}$$

أي أن القيمة المطلقة هي مقدار حقيقي غير سالب .

مثـال : جد القيمة المطلقة للعددين المركبين : $Z_1=4+j3$, $Z_2=-j3$

$$|Z_1|=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$$

$$|Z_2|=\sqrt{0^2+(-3)^2}=\sqrt{0+9}=\sqrt{9}=3$$

•• العمليـــات الأساسيـة للأعـــداد المركبـــة ••

تجري العمليات الأساسية على الأعداد المركبة (الجمع , الطرح , الضرب , القسمة) بإتباع قواعدها على الأعداد الحقيقية مع ملاحظة أن $(j^2=-1)$ كما موضح في الأمثلة التالية :

مثـال (1) : إذا كان : $Z_2=2-j$, $Z_1=1+j2$ عددان مركبان . إجري العمليات الحسابية التاليـــة :

$$1)\ Z_1+Z_2 \ , \ 2)\ Z_1-Z_2 \ , \ 3)\ Z_1.Z_2 \ , \ 4)\ \frac{Z_1}{Z_2} \ , \ 5)\ \frac{1}{Z_1}$$

الحـل :

$$1)\ Z_1+Z_2=1+j2+2-j=3+j$$
$$2)\ Z_1-Z_2=1+j2-(2-j)=-1+j3$$
$$3)\ Z_1.Z_2=(1+j2).(2-j)=1\times 2-j+j4-j^2 2=2+j3+2=4+j3$$
$$4)\ \frac{Z_1}{Z_2}=\frac{1+j2}{2-j}.\frac{2+j}{2+j}=\frac{2+j+j4-2}{2^2-j^2}=\frac{j5}{5}=j$$
$$5)\ \frac{1}{Z_1}=\frac{1}{1+j2}.\frac{1-j2}{1-j2}=\frac{1-j2}{1+4}=\frac{1}{5}-j\frac{2}{5}$$

ملاحظة : إذا كان الجزء الخيالي موجود في مقام الكسر , فيجب ضربه في مرافق العدد المركب لتحويله إلى حقيقي كما في المثال أعلاه .

مثـال (2) : إذا كان $Z_1=1-j$, $Z_2=-2+j4$ عددان مركبان . أوجد قيمة كلا مما يأتي : $1)\ |Z_1.Z_2|$, $2)\ 2\overline{Z_1}-3$, $3)\ Z_2^{\,2}$, $4)\ Z_2.\overline{Z_2}$, $5)\ \left|\frac{Z_2}{Z_1}\right|$

الحـل :

$$1)\ |Z_1.Z_2|=|Z_1|.|Z_2|=\sqrt{1^2+(-1)^2}.\sqrt{(-2)^2+4^2}=\sqrt{2}.\sqrt{20}=2\sqrt{10}$$
$$2)\ 2\overline{Z_1}-3=2(1+j)-3=2+j2-3=-1+j2$$
$$3)\ Z_2^{\,2}=(-2+j4)^2=4+(-j16)+j^2 16=4-j16-16=-4(3+j4)$$
$$4)\ Z_2.\overline{Z_2}=(-2+j4)(-2-j4)=4+j8-j8-j^2 16=4+16=20$$

ملاحظة : عندما يضرب العدد المركب × مرافقه يكون الناتج عدداً حقيقياً

$$5)\ \left|\frac{Z_2}{Z_1}\right|=\frac{|Z_2|}{|Z_1|}=\frac{\sqrt{(-2)^2+(4)^2}}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{10}}{\sqrt{2}}=\sqrt{10}$$

مثـال (3) : جد قيمة (c , b) حتى يحقق متعدد الحدود من الدرجة الثانية: $P(x)=x^2+bx+c$

النتائج التالية :

1) $P(1-j)=0$, 2) $P(1-j)=2+j$

الحل:

1) $P(1-j)=(1-j)^2+b(1-j)+c$

$$0=1-j2+(j)^2+b-jb+c \ = \ 1-1+b+c+j(-2-b)$$

الخاصية الاولى $0=b+c+j(-2-b) \Rightarrow b+c=0$, $c=-b$

$$(-2-b)=0 \Rightarrow \therefore b=-2 \ , \ c=-(-2)=2$$

2) $P(1-j)=b+c+j(-2-b)$

$2+j=b+c+j(-2-b)$

الخاصية الثانية

$\therefore b+c=2 \quad \Rightarrow \quad c=2-b$

$(-2-b)=1 \quad \Rightarrow \quad \therefore b=-3 \quad , \quad c=5$

مثـال (4) : جـد العدد المركب الذي اذا ضرب بالعدد $(1-j5)$ يكون الناتج $2+j3$:

الحل : نفرض العدد المركب : $Z=x+jy$

$(x+jy)(1-j5)=2+j3$

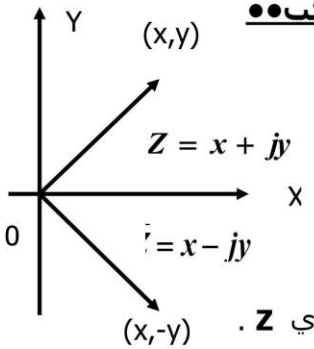
$x+5y+j(y-5x)=2+j3 \quad \therefore x+5y=2 \quad \Rightarrow \quad x=2-5y$

$y-5x=3 \quad \Rightarrow \quad y-5(2-5y)=3 \quad \Rightarrow \quad 26y=13$

$\therefore y=\frac{1}{2} \quad , \quad x=\frac{-1}{2} \quad \Rightarrow \quad Z=\frac{-1}{2}+j\frac{1}{2}$

العدد المركب هو

●●التمثيل الهندسي للعدد المركب●●



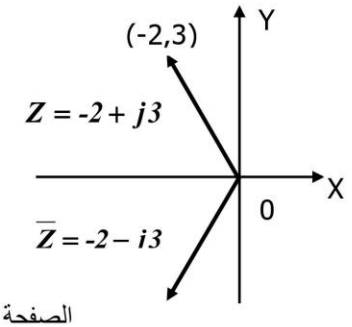
كل عدد مركب : **Z=x+jy** يقابل نقطة احداثياتها **(x,y)** من المستوي **xy** , وكل عدد مركب يمكن تمثيله بمتجه **vector** بدايته نقطة الاصل **(0,0)** ونهايته النقطة التي تقابل ذلك العدد (او باي متجه آخر يساويه).

يسمى المحور **x** بالمحور الحقيقي والمحور **y** بالمحور الخيالي والمستوي **xy** بمستوي الاعداد المركبة او المستوي **Z** .

مرافق العدد المركب $Z=x+jy$ هو العدد المركب $\overline{Z}=x-jy$ وتمثيله هندسياً يكون بالنقطة **(x,-y)** والتي هي انعكاس للنقطة **(x,y)** بالنسبة للمحور **x** .

مثال : مثل هندسيا العدد المركب $Z=-2+j3$ ومثل ايضاً مرافقه بمتجهين في المستوي **Z** .

الحل :



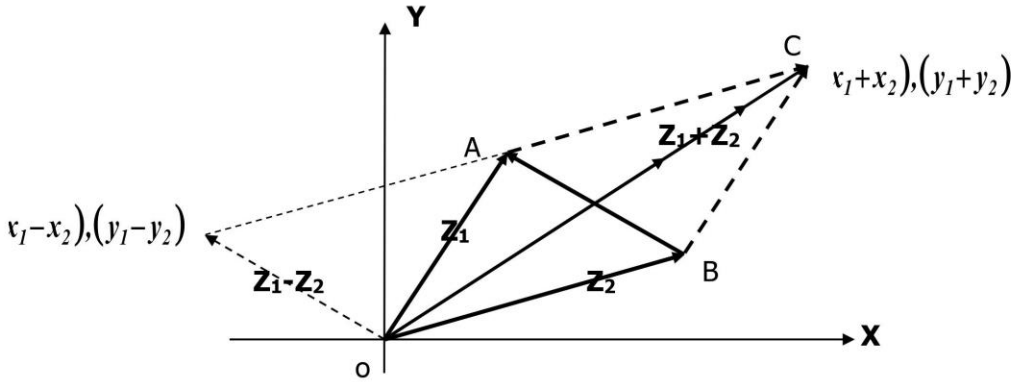
$Z=-2+j3 \quad \Rightarrow \quad Z=(-2,3)$

$\overline{Z}=-2-j3 \quad \Rightarrow \quad \overline{Z}=(-2,-3)$

التمثيل الهندسي لمجموع وحاصل طرح عددين مركبين

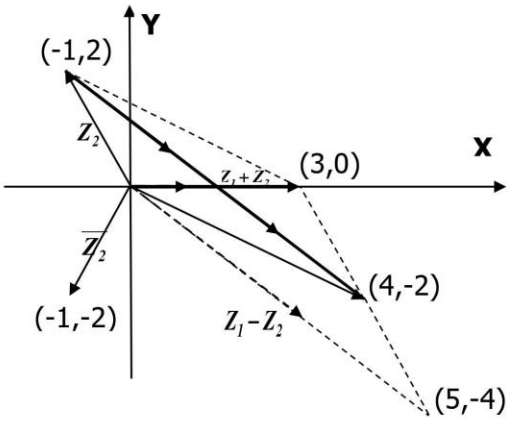
اذا كان Z_1 , Z_2 عددان مركبان كما يلي: $Z_1 = x_1 + jy_1$, $Z_2 = x_2 + jy_2$

ممثلان في المستوي **Z** بالمتجهين $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ على التوالي وعند اكمال متوازي الاضلاع **OACB** فالنقطة التي تقابل مجموع العددين Z_1+Z_2 واحداثياتها $(x_1+x_2),(y_1+y_2)$ تمثل هندسيا المتجه $\overrightarrow{OC}$ (قطر متوازي الاضلاع).اما حاصل الطرح Z_1-Z_2 واحداثياتها $(x_1-x_2),(y_1-y_2)$ فيمثل بمتجه بدايته النقطة Z_2 ونهايته النقطة Z_1 وهو المتجه $\overrightarrow{BA}$, اي ان مجموع العددين المركبين Z_1+Z_2 وحاصل طرحهما Z_1-Z_2 يمثلان قطري متوازي الاضلاع **OACB** كما موضح في الشكل :



مثال 1 : العددان المركبان $Z_1 = 4 - j2$, $Z_2 = -1 + j2$ مثل هندسيا بالرسم كل من:

$$Z_1 \quad , \quad \overline{Z_2} \quad , \quad Z_1 + Z_2 \quad , \quad Z_1 - Z_2$$



الحـل :

$$Z_1 = (4,-2) \quad , \quad Z_2 = (-1,2)$$

$$\overline{Z_2} = -1 - j2 \quad \Rightarrow \quad \overline{Z_2} = (-1,-2)$$

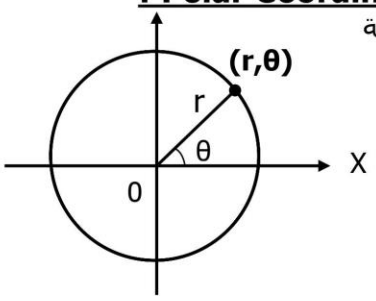
$$Z_1 + Z_2 = 4 - j2 + (-1 + j2) = 3$$

$$\therefore \quad Z_1 + Z_2 = (3,0)$$

$$Z_1 - Z_2 = 4 - j2 - (-1 + j2) = 5 - j4$$

$$\therefore \quad Z_1 - Z_2 = (5,-4)$$

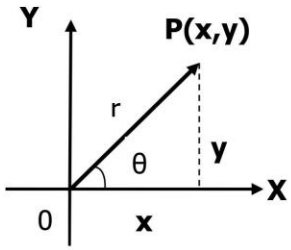
العدد المركب في الاحداثيات القطبية Polar Coordinates :



المحاور القطبية (المثلثية) نظام آخر لتعيين موقع النقطة في المستوي , فموقع النقطة **(r,θ)** بالنسبة للمحاور القطبية , يمثل **r** فيه نصف قطر دائرة مركزها نقطة الاصل و **θ** هي الزاوية التي يصنعها نصف القطر **r** مع المحور **OX** .

فاذا كانت **(r,θ)** احداثيات قطبية تقابل النقطة **P(x,y)** التي تمثل العدد المركب (غير الصفر) : **Z=x+jy** , ولما كان :

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta$$



اذن يمكن كتابة العدد المركب **(Z)** بالصيغة القطبية التالية :

$$Z = x + jy = r(\cos\theta + j\sin\theta) = r\,e^{j\theta}$$

الصيغة الأسية	الصيغة القطبية (المثلثية)	الصيغة الجبرية

اما مرافق العدد المركب **complex conjugate** لصيغ العدد الثلاثة فهي :

$$\therefore \ \overline{Z} = x - jy = r(\cos\theta - j\sin\theta) = r\,e^{-j\theta}$$

حيث ان **(r)** هو طول المتجه الذي يمثل العدد المركب **(Z)** أي ان : **r = |Z|** وبسمى مقياس العدد المركب **(Z)** ويرمز له **modulus (mod Z)** حيث ان :

$$r = |Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

اما زاوية العدد المركب **θ** التي يصنعها المتجه **r** مع المحور **X** الموجب(باتجاه عكس عقارب الساعة) فتقاس بالتقدير الدائري وتسمى سعة العدد المركب **argument** ويرمز لها **(arg Z)** ويمكن ايجادها من المعادلة التالية **(على ان نلاحظ الربع الذي تقع فيه النقطة (x,y))**:

$$\tan\theta = \frac{I_{(Z)}}{R_{(Z)}} \quad \Rightarrow \quad \therefore \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} \quad , \quad 0 \le \arg Z(\theta) \le 2\pi$$

وغالباً ما يتم اختصار التعبير عن الاعداد المركبة بالصيغة التالية : $Z = r\angle\theta$

مثال : اكتب العدد المركب : $Z = 2 \angle 60^\circ$ بالصيغ الجبرية والقطبية والاسية .

الحـل : $r = 2 \quad , \quad \theta = 60^\circ \quad \Rightarrow \quad x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta$

$$x = 2\cos 60^\circ = 2 \times \frac{1}{2} = 1 \quad , \quad y = 2\sin 60^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$\therefore \quad Z = x + jy = 1 + j\sqrt{3}$$ الصيغة الجبرية

لكتابة العدد بالصيغة القطبية نحول الزاوية الى التقدير الدائري بان نضرب الدرجات × $\frac{\pi}{180}$

$$\therefore \quad \theta = 60 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$$

$$Z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + j\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\,e^{j\frac{\pi}{3}}$$ = اذن العدد بالصيغة القطبية والاسية

• (الضرب – الرفع – القسمة) للأعداد المركبة •

إذا كان:

$$Z_1 = r_1(\cos\theta_1 + j\sin\theta_1) \quad , \quad Z_2 = r_2(\cos\theta_2 + j\sin\theta_2)$$

1) $Z_1.Z_2 = r_1.r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + j\sin(\theta_1 + \theta_2)]$ قانون الضرب

2) $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + j\sin(\theta_1 - \theta_2)]$ قانون القسمة

3) $Z^n = r^n[\cos(n.\theta) + j\sin(n.\theta)]$ قانون الرفع

تـمارين محـلولـة

1) . اكتب العـدد المركب ($Z = -j$) بالصيغـة القطبية والاسية مع الرسم:

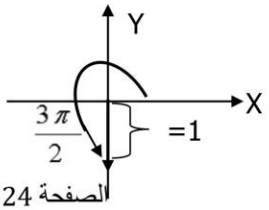
الحـل :

$$Z = -j \quad \Rightarrow \quad Z = (0,-1) \quad \therefore \quad x = 0 \quad , \quad y = -1$$

$$r = |Z| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1 \quad , \quad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\frac{-1}{0} = -\infty$$

من التمثيل الهندسي للعدد المركب نجد ان : $\theta = 270^\circ$

قاعدة : لتحويل الزوايا من الدرجات الى التقدير الدائري :



$$\theta = 270 \times \frac{\pi}{180} = \frac{3}{2}\pi$$: $\frac{\pi}{180}\times$ نضرب الدرجات

$$\therefore \quad Z = -j = 1 \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{2} + j \sin \frac{3\pi}{2} \right) = e^{j\frac{3\pi}{2}}$$

2) اكتب العدد المركب $Z = 3.e^{j\frac{\pi}{3}}$ في الصيغة الجبرية .

الحل : $r = 3 \quad , \quad \theta = \frac{\pi}{3} = 60^\circ \quad \Rightarrow \quad x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta$

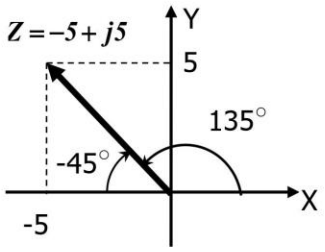
$$x = r\cos 60 = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad , \quad y = r\sin 60 = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \quad Z = \frac{3}{2} + j\frac{3\sqrt{3}}{2}$$ اذن العدد المركب هـو :

---

3) . اكتب العـــدد المركب $Z = j(j5+5)$ بالصيغـــة القطبيه والاسية مع الرسم :

$$Z = j(j5+5) = -5 + j5 \quad \Rightarrow \quad x = -5 \ , \ y = 5$$ الحـــــل :



$$r = |Z| = \sqrt{(-5)^2 + (5)^2} = 5\sqrt{2}$$

$$Tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{5}{-5} = -1 \quad \Rightarrow \quad \therefore \quad \theta = -45^\circ$$

نرسم التمثيل الهندسي للعدد المركب :

بمـــا أن **(y)** موجب و **(x)** سالب هذا يعني أن الزاوية في الربع الثاني

$$\therefore \quad \theta = 135 \times \frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{4}$$

$$\therefore \quad \theta = 180 - 45 = 135^\circ$$

$$\therefore \quad Z = 5\sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{4} + j \sin \frac{3\pi}{4} \right) = 5\sqrt{2} \cdot e^{j\frac{3\pi}{4}}$$

---

4) . اكتب العدد المركب : $Z = 4 \angle 90^\circ$ في الصيغة الجبرية ثم بين مرافق العدد.

$$r = 4 \quad , \quad \theta = 90^\circ = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta$$

الحـــل :

$$x = 4\cos 90 = 4(0) = 0 \quad , \quad y = 4\sin 90 = 4(1) = 4$$

$$Z = x + j\,y = 0 + j4 = j4$$ الصيغة الجبرية

$$Z = 4\left(\cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2}\right) = 4e^{j\frac{\pi}{2}}$$ الصيغة القطبية والاسية

مرافق العدد المركب للصيغ الثلاثة :

$$\overline{Z} = -j4 = 4\left(\cos\frac{\pi}{2} - j\sin\frac{\pi}{2}\right) = 4e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

5) . اكتب الاعداد $Z_1 = \frac{1}{2}(1 + j\sqrt{3})$ و $Z_2 = \sqrt{3} + j$ في الصيغة

القطبية ثم جد من الصيغة نفسها $Z_1.Z_2$, $\frac{Z_2}{Z_1}$, $Z_1^{\,3}$, $\overline{Z_2}^{\,3}$

مع توضيح التمثيل الهندسي لكل منها بالرسم .

الحـــل :

$$r_1 = |Z_1| = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = 1 \quad , \quad r_2 = |Z_2| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} = 2$$

$$\tan\theta_1 = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \theta_1 = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$$

$$\tan\theta_2 = \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \theta_2 = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore\ Z_1 = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} = 1.\left(\cos\frac{\pi}{3} + j\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\therefore\ Z_2 = \sqrt{3} + j = 2.\left(\cos\frac{\pi}{6} + j\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$Z_1.Z_2 = r_1.r_2\left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + j\sin(\theta_1 + \theta_2)\right]$$

$$Z_1.Z_2 = 2\left(\cos(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6})+j\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6})\right) = 2(\cos\frac{\pi}{2}+j\sin\frac{\pi}{2}) = j2$$

$$\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{r_2}{r_1}\left[\cos(\theta_2-\theta_1)+j\sin(\theta_2-\theta_1)\right]$$

$$\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{2}{1}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)+j\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)\right] = 2\left[\cos\frac{-\pi}{6}+j\sin\frac{-\pi}{6}\right]$$

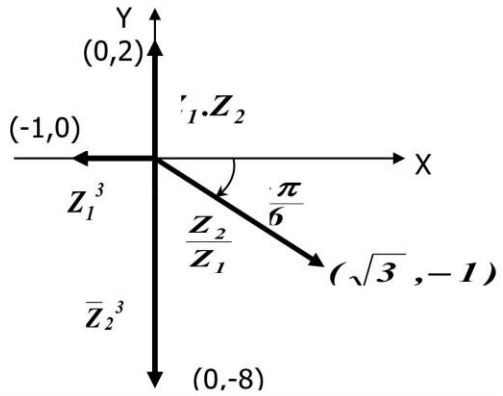
$$\frac{Z_2}{Z_1} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-j\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}-j$$

$$Z_1^{\,3} = r_1^{\,3}(\cos 3\theta_1 + j\sin 3\theta_1) = 1(\cos\pi + j\sin\pi) = -1+j(0) = -1$$

لايجاد $\overline{Z_2}^{\,3}$ نجد اولآ $\overline{Z_2}$:

$$\overline{Z_2} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6}-j\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\overline{Z_2}^{\,3} = 2^3\left(\cos 3\times\frac{\pi}{6}-j\sin 3\times\frac{\pi}{6}\right) = 8\left(\cos\frac{\pi}{2}-j\sin\frac{\pi}{2}\right) = -j8$$



ايجاد جذور الاعداد المركبة
Roots of complex numbers

ان عملية ايجاد الجذور النونية $Z^{\frac{1}{n}}$ للعدد المركب Z هي حل للمعادلة :

أي ايجاد قيم Z التي تحقق المعادلة (1) : $Z^n = Z \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

عندما يكون كل من Z والعدد الصحيح الموجب n معلومين , وحسب نظرية دي مويفر De Moivre ،s theorem , واذا كان : $Z = r(\cos\theta + j\sin\theta)$

وحيث n عدد صحيح موجب فان : $Z^n = r^n[\cos(n\theta) + j\sin(n\theta)]$

اما $\sqrt[n]{Z}$ فيساوي : $\sqrt[n]{Z} = Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta}{n} + j\sin\frac{\theta}{n}\right]$

ويمكن الحصول على n من الجذور (الحلول)للعدد المركب $\sqrt[n]{Z}$ عندما $Z \neq 0$

بالتقدير الدائري $\sqrt[n]{Z} = Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + j\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right]$

بالتقدير بالدرجات $\sqrt[n]{Z} = Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta + 360k}{n} + j\sin\frac{\theta + 360k}{n}\right]$

حيث ان $[k = 0, 1, 2, 3, \ldots, (n-1)]$

وهندسياً فان طول كل متجهة من المتجهات التي عددها n والتي تمثل جذور العدد المركب $\sqrt[n]{Z}$ هـو $r^{\frac{1}{n}}$, وان الزاوية $\frac{\theta}{n}$ تمثل زاوية العدد المركب لأحد الجذور وان زوايا الجذور الاخرى نحصل عليها باضافة مضاعفات $\frac{2\pi}{n}$ الى الزاوية $\frac{\theta}{n}$.

مثـال (1): اذا كان العدد المركب $Z = 16\angle 60^\circ$ جـــد $\sqrt[4]{Z}$

الحـــل : $r = 16 \quad , \quad \theta = 60^\circ \quad , \quad n = 4 \quad , \quad k = 0, 1, 2, 3$

$$\sqrt[n]{Z} = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta + 360k}{n} + j\sin\frac{\theta + 360k}{n}\right]$$

$$\sqrt[4]{Z} = 16^{\frac{1}{4}}\left[\cos\frac{60 + 360(0)}{4} + j\sin\frac{60 + 360(0)}{4}\right]$$

الجذر الاول : $Z_1 = 2(\cos 15 + j\sin 15)$

$$= 16^{\frac{1}{4}}\left[\cos\frac{60 + 360(1)}{4} + j\sin\frac{60 + 360(1)}{4}\right]$$

الجذر الثاني : $Z_2 = 2(\cos 105 + j\sin 105)$

$$= 16^{\frac{1}{4}}\left[\cos\frac{60+360(2)}{4} + j\sin\frac{60+360(2)}{4}\right]$$

الجذر الثالث : $Z_3 = 2(\cos 195 + j\sin 195)$

$$= 16^{\frac{1}{4}}\left[\cos\frac{60+360(3)}{4} + j\sin\frac{60+360(3)}{4}\right]$$

الجذر الرابع : $Z_4 = 2(\cos 285 + j\sin 285)$

مثال (2): جد الجذور الثلاثة للعدد المركب $Z = -1 + j$ مع تمثيل الجذور بالرسم .

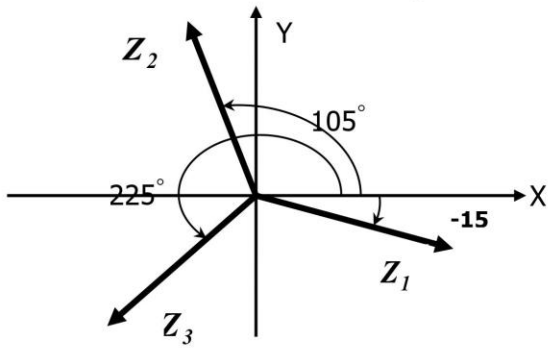
الحـــل: $r = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$, $\theta = \tan^{-1}\frac{1}{-1} = -45^\circ = \frac{-\pi}{4}$

$$n = 3 \quad , \quad k = 0\ ,\ 1\ ,\ 2$$

$$\sqrt[3]{Z} = \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left[\cos\frac{-45}{3} + j\sin\frac{-45}{3}\right] = 2^{\frac{1}{6}}\left[\cos(-15) + j\sin(-15)\right]$$

$$Z_2 = 2^{\frac{1}{6}}\left[\cos\frac{-45+360(1)}{3} + j\sin\frac{-45+360(1)}{3}\right] = 2^{\frac{1}{6}}\left[\cos(105) + j\sin(105)\right]$$

$$Z_3 = 2^{\frac{1}{6}}\left[\cos\frac{-45+360(2)}{3} + j\sin\frac{-45+360(2)}{3}\right] = 2^{\frac{1}{6}}\left[\cos(225) + j\sin(225)\right]$$



مثال (3): حل المعادلة التالية $Z^6 - 1 = 0$.

الحـــل : $Z^6 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad Z^6 = 1 \quad \Rightarrow \quad \therefore\ Z = \sqrt[6]{1}$

$$\therefore\ x = 1\ ,\ y = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{(1)^2 + 0} = 1 \quad , \quad \theta = \tan^{-1}\frac{0}{1} = 0$$

$$n = 6 \quad , \quad k = 0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 5$$

$$\sqrt[n]{Z} = Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + j\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right]$$

$$Z_1 = 1(\cos 0 + j \sin 0) = 1(1 + j(0)) = 1$$

$$Z_2 = 1\left(\cos\frac{0+2(1)\pi}{6} + j\sin\frac{0+2(1)\pi}{6}\right) = 1\left(\cos\frac{\pi}{3} + j\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Z_3 = 1\left(\cos\frac{0+2(2)\pi}{6} + j\sin\frac{0+2(2)\pi}{6}\right) = 1\left(\cos\frac{2\pi}{3} + j\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Z_4 = 1\left(\cos\frac{0+2(3)\pi}{6} + j\sin\frac{0+2(3)\pi}{6}\right) = 1(\cos\pi + j\sin\pi) = -1$$

$$Z_5 = 1\left(\cos\frac{0+2(4)\pi}{6} + j\sin\frac{0+2(4)\pi}{6}\right) = 1\left(\cos\frac{4\pi}{3} + j\sin\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Z_6 = 1\left(\cos\frac{0+2(5)\pi}{6} + j\sin\frac{0+2(5)\pi}{6}\right) = 1\left(\cos\frac{5\pi}{3} + j\sin\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

مثال (4) : جد كل الاعداد المركبة التي تحقق المعادلة $Z^2 = j4$ مع التمثيل بالرسم .

الحـــل : $Z^2 = j4 \quad \Rightarrow \quad Z = \sqrt{j4}$

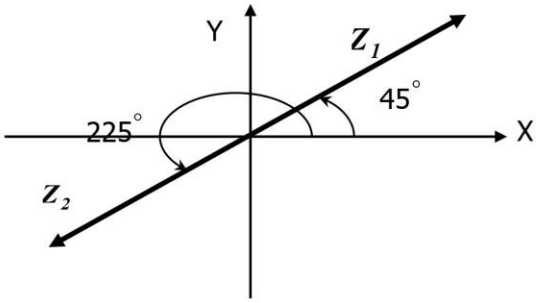
$$\therefore\ x = 0\ ,\ y = 4 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{0+4^2} = 4 \quad , \quad \theta = \tan^{-1}\frac{4}{0} = 90^\circ$$

$$\sqrt[n]{Z} = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta + k360}{n} + j\sin\frac{\theta + k360}{n}\right],\ n = 2\ ,\ k = 0\ ,1$$

$$Z_1 = 2\left[\cos\frac{90}{2} + j\sin\frac{90}{2}\right] = \frac{2}{\sqrt{2}} + j\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}(1 + j)$$

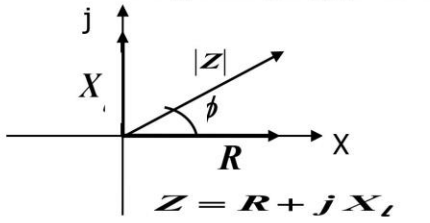
$$Z_2 = 2\left[\cos\frac{90+360(1)}{2} + j\sin\frac{90+360(1)}{2}\right] = 2(\cos 225 + j\sin 225)$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{2}} - j\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}(1 + j)$$



تطبيقات على الاعداد المركبة Applications of complex numbers

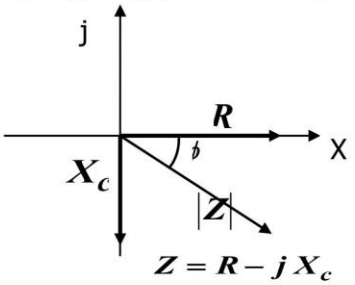
يمكن استخدام صيغة الاعداد المركبة للتعبير عن العناصر التالية في دوائر التيار الكهربائي المتناوب : المقاومة **R** resistance , المحاثة **L** inductance , والمتسعة **C** capacitance حيث تمثل المقاومة على المحور الحقيقي الموجب (المحور **X**) , بينما تكون الممانعة الحثية **inductive reactance** التي يرمز لها X_l على الجزء الموجب من المحور الخيالي j (المحور **Y**) وذلك لكون الفولتية تتقدم على التيار في دائرة المحث بزاوية طور قدرها $\pi/2$. اما الممانعة السعوية **capacitive reactance** التي يرمز لها X_c فتكون على الجزء السالب من المحور الخيالي j (المحور **Y**) وذلك لكون الفولتية تتخلف على التيار في دائرة المتسعة بزاوية طور قدرها $\pi/2$. كما مبين في الشكل ادناه :



$$Z = R + j X_l$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X_l^2}$$

$$\phi = tan^{-1} X_l / R$$

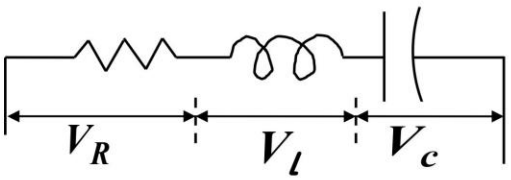


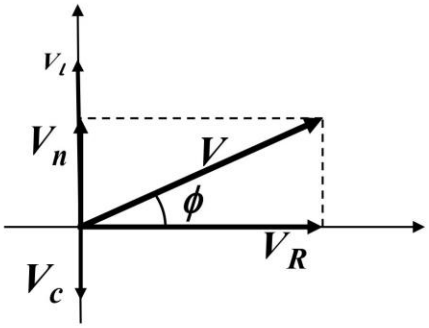
$$Z = R - j X_c$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X_c^2}$$

$$\phi = tan^{-1} X_c / R$$

ان الممانعة المشتركة للمقاومة وكل من الممانعة الحثية والممانعة السعوية تسمى المعاوقة المركبة **Impedance** ويرمز لها Z اما القيمة العددية للمعاوقة فيرمز لها $|Z|$ في دائرة التيار المتناوب ذات الربط المتوالي والمتكونة من مقاومة وملف ومتسعة يكون التمثيل الاتجاهي للدائرة كما في الشكل ادناه :





$$V_n = V_l - V_c$$

$$V = V_R + j V_n$$

$$V_R = I R \quad , \quad V_l = I X_l \quad , \quad V_c = I X_c$$

ولكن : $\omega = 2\pi f$, $X_c = 1/2\pi f C$, $X_l = 2\pi f l$

حيث ان : V :الفولتية , I : التيار , l : الحث , C :المتسعة , f :التردد

اذن : $X_c = 1/\omega C$, $\therefore X_l = \omega l$

امثلـة محلولة :

1) جد المقاومة والمحاثة Inductance أو المتسعة Capacitance لكل من المعاوقات المركبة Impedances التالية , معتبراً قيمة التردد $f = 50\ Hz$:

$a)\ (4 + j7)\Omega$, $b)\ (-j20)\Omega$, $c)\ \sqrt{12}\angle -60^\circ\ \Omega$

الحـل : $a)$ اذن : Impedance $Z = 4 + j7\ \Omega$

Resistance $= 4\ \Omega$ and reactance $= 7\ \Omega$

بما ان الجزء الخيالي اشارته موجبة اذن الـ reactance هو ملف inductive :

$$X_l = 7 \quad \Rightarrow \quad X_l = 2\pi f l \quad \Rightarrow \quad \therefore l = \frac{X_l}{2\pi f}$$

$$l = \frac{7}{2\pi\, 50} = 0.0223\ h = 22.3\ m h$$ ملي هنري

$b)$ اذن : Impedance $Z = -j20\ \Omega$

Resistance $= 0\ \Omega$ and reactance $= 20\ \Omega$

بما ان الجزء الخيالي اشارته سالبة اذن الـ reactance هو متسعة capacitive :

$$X_c = 20 \quad \Rightarrow \quad X_c = \frac{1}{2\pi f c} \quad \Rightarrow \quad \therefore c = \frac{1}{2\pi f X_c}$$

$$\therefore c = \frac{1}{2\pi\, 50 \times 20} \times 10^6 = 159.2\ \mu F$$ **مايكرو فاراد**

$c)$ اذن : Impedance $Z = \sqrt{12}\angle -60^\circ\ \Omega$

$$Z = \sqrt{12}\ \left(\cos(-60^\circ) + j\sin(-60^\circ)\right)$$

$$Z = \sqrt{12}\ \left(\frac{1}{2} + j\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} - j3$$

Resistance $= \sqrt{3}\ \Omega$ and reactance $= 3\ \Omega$

بما ان الجزء الخيالي اشارته سالبة اذن الـ reactance هو متسعة capacitive :

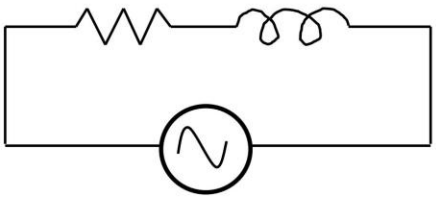
$$X_c = 3 \quad \Rightarrow \quad X_c = \frac{1}{2\pi f c} \quad \Rightarrow \quad \therefore c = \frac{1}{2\pi f X_c}$$

$$\therefore c = \frac{1}{2\pi\, 50 \times 3} \times 10^6 = 1061.1 \quad \mu F$$ مايكرو فاراد

2) في دائرة التوالي الموضحة في الشكل فان : $R = 5\,\Omega \quad , \quad l = 2\ mH$

أوجد المعاوقة المركبة بالصيغة المثلثية. , $v = 150 \sin 5000t$

الحـل : $\because X_l = \omega l = 5000(2 \times 10^{-3}) = 10\Omega$



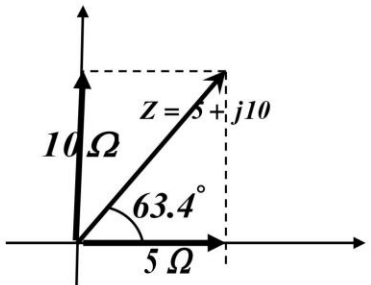
$$Z = R + j X_l$$

$$Z = 5 + j10 \ \Omega$$

ولايجاد المعاوقة بالصيغة المثلثية : $|Z| = \sqrt{5^2 + 10^2} = 11.16\ \Omega$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{10}{5} = 63.4^\circ$$

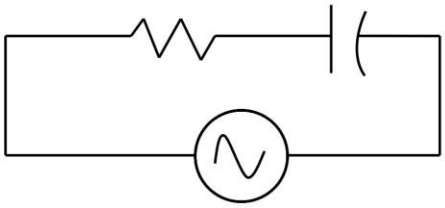
$$\therefore \quad Z = 11.16 \angle\ 63.4^\circ \quad \Omega$$



3) في دائرة التوالي الموضحة في الشكل فان : $c = 5\ \mu F \quad , \quad R = 20\,\Omega$

والفولتية $v = 150 \cos 10000t$, أوجد المعاوقة المركبة بالصيغة المثلثية.

الحـل:



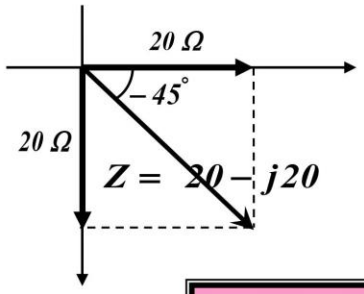
$$\because X_c = \frac{1}{\omega c} = \frac{1}{10000(5 \times 10^{-6})} = 20\Omega$$

$$Z = 20 - j20 \ \Omega$$

ولايجاد المعاوقة بالصيغة المثلثية : $|Z| = \sqrt{20^2 + 20^2} = 28.3\ \Omega$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{20}{-20} = -45^\circ$$

$$\therefore \quad Z = 28.3 \angle -45^\circ \ \Omega$$



الـــــدوال Functions

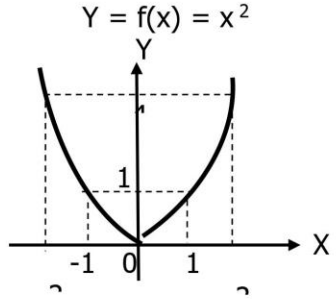
الـدالـــة : هي مجموعة إحداثيات نقاط **(x , y)** بحيث أن لكل قيمة للمتغير الأول (المستقل **X** Independent) لا تـوجـد إلا قيمـة (صورة) واحدة فقط للمتغير الثاني (المعتمد **Y** Dependent) , وتكتب هذه العلاقة بالصيغة التالية : **Y = f (x)**

وتقرأ **Y** هي دالة **X** , اي ان **Y** تمثل قيمة الدالة**(f)** عند النقطة **X** ,لنفرض ان لدينا الدالة : $y = f(x) = x^2$, وأن مجال تغير المتغير **(x)** هو مجموعة الارقام :

(- 2 , -1 , 0, 1 , 2) فقط . وبموجب هذه الأرقام فإن قيم **(y)** التي تقابل قيم **(x)** هي على التوالي**(4 ,1 , 0 , 1 , 4)**,اي ان الدالة : **$y=x^2$** هي عبارةعن الازواج المرتبة التالية: **{ (− 2 , 4) , (− 1 , 1) , (0 , 0) , (1 , 1) , (2 , 4) }**

وتكتب هذه الصيغة بالشكل التالي :

$$y = f(-2) = 4 \quad , \quad y = f(-1) = 1 \quad , \quad y = f(0) = 0 \quad , \quad y = f(1) = 1 \quad , \quad y = f(2) = 4$$



x	-2	-1	0	1	2
Y=F (x)	4	1	0	1	4

منطلق الدالـة (Domain) ويرمـز لـه (D_F) .
مـدى الدالـة (Range) ويرمـز لـه (R_F)

$$D_F = \{ x : -2 \le x \le 2 \} = [-2, 2]$$
$$R_F = \{ y : \ 0 \le y \le 4 \} = [0 , 4]$$

ان مجموعة كل القيم الممكنة لـ **x** تسمى مجال (منطلق) الدالة **Domain** , وهي قيم **x**

التي تجعل المعادلة $y=f(x)$ معرفة , ويكتب منطلق الدالة على شكل فترة **مفتوحة او مغلقة** :

وتكون الفترة مغلقة **[a,b]** عندما قيم **x** تكون $a \le x \le b$ وتعني الاقواس **المربعة** ان منطلق الدالة هو كل الاعداد الحقيقية بين a , b بالاضافة الى العددين a و b .
بينما الفترة المفتوحة **(a,b)** عندما قيم **x** تكون $a < x < b$ وتعني الاقواس **الدائرية** ان منطلق الدالة هو كل الاعداد الحقيقية بين a , b ما عدا العددين a و b فهما ليسا ضمن منطلق الدالة .

اما مجموعة القيم التي تتخذها الدالة للمتغير المعتمد **y** عندما تأخذ x جميع قيم المنطلق فتسمى مدى الدالة **Range** .

مثـــال : بين منطلق الدالة **domain** ومداها **range** في كل من الدوال التالية , ثم احسب : $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$ لكل منها .

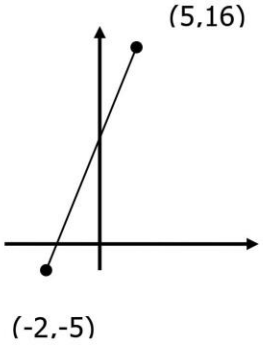
1) $y=f(x)=3x+1 \qquad -2 \le x \le 5$

$f(-2)=3(-2)+1=-5$, $f(5)=3(5)+1=16$

Domain $=\{x : -2 \le x \le 5\} = [-2,5]$
Range $=\{y : -5 \le y \le 16\} = [-5,16]$

$f(-1)=3(-1)+1=-2$

$f(0)=3(0)+1=1$, $f(2)=3(2)+1=7$



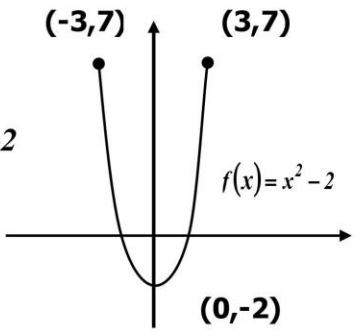
2) $y=f(x)=x^2-2 \qquad -3 < x < 3$

$f(-3)=(-3)^2-2=7$, $f(3)=(3)^2-2=7$

Domain $=\{x : -3 < x < 3\} = (-3,3)$
Range $=\{y : -2 \le y < 7\} = [-2,7)$

$f(-1)=(-1)^2-2=-1$, $f(0)=(0)^2-2=-2$

$f(2)=(2)^2-2=2$

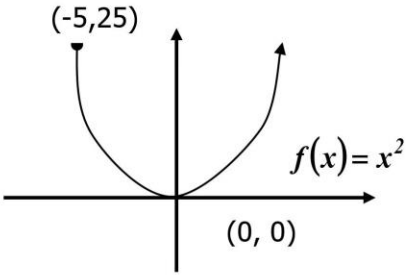


3) $y = f(x) = x^2 \qquad x \geq -5$

$f(-5) = (-5)^2 = 25$

Domain ={x : $x \geq -5$} = **[-5,∞)**

Range ={y : $y \geq 0$ } = **[0,∞)**



$f(-1) = (-1)^2 = 1$

$f(0) = (0)^2 = 0$, $f(2) = (2)^2 = 4$

4) $y = f(x) = \dfrac{2}{2x-1}$

يما ان الدالة كسرية , نستبعد قيم x التي تجعل المقام يساوي صفر من منطلق الدالة

$2x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0.5$

Domain ={ $x \in R : \; x \neq 0.5$ **}**

ثم نكتب الدالة بدلالة y ونستبعد القيم التي تجعل المقام يساوي صفر من مدى الدالة :

$$y = \frac{2}{2x-1} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2+y}{2y} \quad \Rightarrow \quad 2y = 0 \quad \Rightarrow \therefore \; y = 0$$

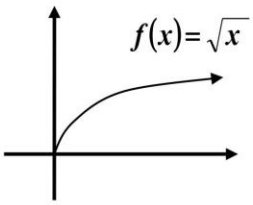
Range ={ $y \in R : \; y \neq 0$ **}**

$$f(-1) = \frac{2}{2(-1)-1} = \frac{-2}{3} \qquad f(0) = \frac{2}{2(0)-1} = -2 \qquad f(2) = \frac{2}{2(2)-1} = \frac{2}{3}$$

5) $y = f(x) = \sqrt{x} \qquad x \geq 0$

Doma $y = f(x) = \dfrac{2}{2x-1}$ = **[0,∞)**

Rang[illegible] = **[0,∞)**



$f(-1) = \sqrt{-1}$ قيمة غير معرفة وهي خارج منطلق الدالة

$f(0) = \sqrt{0} = 0$, $f(2) = \sqrt{2} = 1.414$

رابعا : الاختبار البعدي

ضع دائرة حول الاجابة الصحيحة لكل مما ياتي :

١ – جد كل الاعداد المركبة التي تحقق المعادلة $Z^2 = j4$ مع التمثيل بالرسم.

(a $-\sqrt{2}\ (1+j)$

(b $(1 + j)$

(c $(-1 + j)$

٢ – جد الجدور الثلاثة للعدد المركب $Z = -1 + j$ مع التمثيل بالرسم

(a $Z1 = COS(-16) + J\ SIN(-15)\ ,\ Z2 = COS(-44)\ ,\ Z3 = COS(225)$

(b $Z1 = 2^{1/6}\ COS(-15) + JSIN(-15),\ Z2 = 2^{1/6}\ COS(105) + J\ SIN(-15),$

$Z3 = 2^{1/6}\ COS(225) + J\ SIN(225)$

مفاتيح الاجابة على الاختبارات

الاختبار القبلي		الاختبار البعدي	
رقم السؤال	الاجابة الصحيحة	رقم السؤال	الاجابة الصحيحة
١	A	١	A
٢	B	٢	B
٣	A		

المصادر الاساسية :

Monaghan, J., Ely, R., Pinto, M. M., & Thomas, M. (2023). *The learning and teaching of Calculus: ideas, insights and activities*. Taylor & Francis.

20191008_080722_640.pdf (uoninevah.edu.iq)

خارطة القياس المعتمدة

المحتوى التعليمي	عناوين الفصول	الأهمية النسبية	الأهداف السلوكية					عدد الفقرات
			المعرفة	الفهم	التطبيق	التحليل	التقييم	
			النسبة					
الفصل الاول	اسس الرياضيات	١٠٠ %	٣٥%	٢٥ %	١٠%	١٠%	٢٠ %	٥