



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
الجامعة التقنية الشمالية
معهد التقني الدور



الحقية التعليمية

القسم العلمي: تقنيات الاجهزة الطبية

اسم المقرر: تفاضل
وتكامل

المرحلة / المستوى:
الاول

الفصل الدراسي: الثاني

السنة

الدراسية: ٢٠٢٤/٢٠٢٥





معلومات عامة

اسم المقرر:	تفاضل وتكامل
القسم:	تقنيات الاجهزة الطبية
الكلية:	معهد تقني الدور
المرحلة / المستوى	الاول
الفصل الدراسي:	الثاني
عدد الساعات الاسبوعية:	نظري ٢ عملي
عدد الوحدات الدراسية:	٢
الرمز:	TIDO102
نوع المادة	نظري * عملي كلهما
هل يتوفر نظير للمقرر في الاقسام الاخرى	كلا
اسم المقرر النظير	-
القسم	-
رمز المقرر النظير	-
معلومات تدريسي المادة	
اسم مدرس (مدرسي) المقرر:	فلاح محمد عبد
اللقب العلمي:	-
سنة الحصول على اللقب	-
الشهادة :	دكتوراة
سنة الحصول على الشهادة	
عدد سنوات الخبرة (تدريس)	

الوصف العام للمقرر

يتناول المقرر الاشتقاق ، الغايات ، تطبيقات التفاضل ، التكامل ، وطريقة الشرح ووسائله
موضوعات المقرر :

- تعريف الطالب بالمقرر ومفرداته ، أهمية المشتقة ورموز الاشتقاق
- قوانين ايجاد المشتقة لبعض الدوال
- مشتقة الدالة الضمنية Implicit function
- قوانين مشتقة الدوال المثلثية ، يوجد ٦ قوانين
- مشتقة الدالة الاسية ، امثلة محلولة
- مشتقة الدالة المركبة (الدالة البارامترية) Parametric differentiation
- تمارين في حساب المماس والعمود للدالة
- تمارين في حساب الغاية

تطبيقات التفاضل

- طريقة ايجاد نقاط الدوران (النهايات العظمى والنهايات الصغرى) للدالة
- نقطة انقلاب الدالة (التحول) ، تمارين محلولة

التكامل

- التكامل الغير المحدد
- جدول التكامل الاساسي ، تمارين محلولة
- حل التكامل بالتجزئة
- تطبيقات على التكامل الغير المحدد
- التكامل المحدد
- ايجاد طول قوس المنحني (L)

الاهداف العامة

- العمل على مواكبة العصر، وتفسير تطورات العصر من الناحية العلمية ومن الناحية التكنولوجية كذلك، لأنها تعد لغة العصر، وأسلوباً علمياً يستطيع عبره البشر التواصل فيما بينهم.
- العمل على استعمال المبادئ التي من دورها تفسير واقع الرياضيات، وإدماج فروع ومجالاته مع بعضها لفهم الرياضيات وباقي العلوم الأخرى باختلاف أنواعها.
- العمل على تشجيع وتحفيز التفكير بشكل منطقي المبني على الاستنتاجات والبراهين.
- العمل على ربط الرياضيات بمجالات العلوم الأخرى، كالأحياء، والفيزياء، والطب، والكيمياء، والاقتصاد، والزراعة، والصناعة، وغيرها من المجالات الأخرى.
- التنويه إلى دور الرياضيات الكبير في تقدم علم الحاسب الآلي والتكنولوجيا، حيث ساعد الرياضيات في ضبط وبرمجة الحاسوب وبرامجه (نظام العد الثنائي).



الأهداف الخاصة

- اكتساب المتعلم مهارات اسس التكامل وقوانينها وعلاقته بالتفاضل
- إلمام المتعلم بالدوال المثلثية والتكامل المحدد والغير المحدد
- التركيز على حل الامثلة الخاصة بالتكامل وفي نهاية كل محاضرة يوجد نشاط ومهمة

الأهداف السلوكية او نواتج التعلم

- بعد الانتهاء من الدرس (المحاضرة) سيكون الطالب قادرا على ان:
- استخدام الرياضيات في المواضيع العلمية الاخرى
 - زيادة مقدرته على التفكير المنطقي عند حل التمارين
 - يميز بين المشتقة والتفاضل والتكامل
 - كيفية ربط المعطيات مع معلوماته للحصول على حل المسألة

المتطلبات السابقة

كتاب الرياضيات **Thomas Calculus**

الأهداف السلوكية او مخرجات التعليم الأساسية		
ت	تفصيل الهدف السلوكي او مخرج التعليم	آلية التقييم
1	معرفة الطالب باسس الرياضيات الاساسية	• المحاضرات • الواجبات الفردية • والمشاركة • حلقات النقاش والاختبارات
2	اكتساب الطالب القدرة على حل مسائل التكامل والتفاضل	البحث وتطوير المهارة من خلال الابحاث وكتب ومصادر الرياضيات
3	القدرة على تطبيق التكامل والتفاضل في المواضيع العلمية	• مشاريع فردية • الاختبارات
4	معرفة الطالب بالدوال المثلثية والدوال الاسية وحل الامثلة عليها	• حل التمارين • الانشطة



أساليب التدريس (حدد مجموعة متنوعة من أساليب التدريس لتناسب احتياجات الطلاب ومحتوى المقرر)

الاسلوب او الطريقة	مبررات الاختيار
١- المحاضرات النظرية من خلال الشرح	محدد وواضح ويطبق بسهولة وهو التقليدي
٢. التعلم التفاعلي والمتبادل	التفاعل بين الطلبة
٣. التعلم القائم على حل المسائل الرياضية حتى لو كان بدون مراجعة سابقة للمادة	اكتساب الطالب مهارة حل المسائل من خلال تعلم اسس ومبادئ الرياضيات
٤. المناقشة في نهاية المحاضرة	تقديم الخلاصة والفهم للموضوع

الفصل الثاني من المحتوى العلمي						
٢ ساعة اسبوعيا				الوقت		عنوان الفصل
طرق القياس	التقنيات	طريقة التدريس	العنوان الفرعي	العملي	النظري	التوزيع الزمني
عرض الامثلة والمناقشة وملاحظة مستوى الطلبة	عرض تقديمي، شرح، أسئلة وأجوبة، مناقشة	محاضرة نظري	مقدمة عن المقرر، أهداف التعلم، محتوى المقرر	-	٢	الأسبوع الأول
			العناوين الفرعية			
عرض الامثلة والمناقشة وملاحظة مستوى الطلبة	(شرح أسئلة وأجوبة/ مناقشة)	محاضرة نظري	القيم العظمى والصغرى	-	٢	الأسبوع الثاني
			المسافة والسرعة والتعجيل			
			تطبيقات فيزيائية			
			تطبيقات هندسية			
عرض الامثلة والمناقشة وملاحظة مستوى الطلبة	(شرح أسئلة وأجوبة/ مناقشة)	محاضرة نظري	رسم الدوال	-	٢	الاسبوع الثالث
			رسم الدالة المثلثية			
			الدوال العكسية			
عرض الامثلة والمناقشة وملاحظة مستوى الطلبة	(شرح أسئلة وأجوبة/ مناقشة)	محاضرة نظري	الدوال الاسية	-	٢	الاسبوع الرابع
			اللوغاريتمية			
			النهايات العظمى			
			النهايات الصغرى			
			نقاط الانقلاب			
			المحاذيات			



عرض الامثلة والمناقشة وملاحظة مستوى الطلبة	(شرح أسئلة وأجوبة/ مناقشة)	محاضرة نظري	التكامل	التكامل	-	٢	الاسبوع الخامس والسادس
			القوانين وعلاقته				
			بالتفاضل				
			التكامل المحدد				
عرض الامثلة والمناقشة وملاحظة مستوى الطلبة	(شرح أسئلة وأجوبة/ مناقشة)	محاضرة نظري	التكامل الغير المحدد	التكامل	-	٢	الاسبوع السابع والثامن
			تطبيقات التكامل				
			المساحة تحت				
			المنحنيين				
عرض الامثلة والمناقشة وملاحظة مستوى الطلبة	(شرح أسئلة وأجوبة/ مناقشة)	محاضرة نظري	المساحة بين	التكامل	-	٢	الاسبوع التاسع والعاشر
			المنحنيين				
			المساحة التقريبية				
			الحجوم الدورانية مع				
عرض الامثلة والمناقشة وملاحظة مستوى الطلبة	(شرح أسئلة وأجوبة/ مناقشة)	محاضرة نظري	الاهتمام بالرسم	التكامل	-	٢	الاسبوع الحادي عشر والثاني عشر والثالث عشر
			ايجاد طول قوس				
			المنحني				
			تطبيقات مختلفة				
عرض الامثلة والمناقشة وملاحظة مستوى الطلبة	(شرح أسئلة وأجوبة/ مناقشة)	محاضرة نظري	طرق عامة في	التكامل	-	٢	الاسبوع الحادي عشر والثاني عشر والثالث عشر
			التكامل				
			طريقة التعويض				
			طريقة التجزئة				
			طريقة استخدام				
عرض الامثلة والمناقشة وملاحظة مستوى الطلبة	(شرح أسئلة وأجوبة/ مناقشة)	محاضرة نظري	الكسور الجزئية	التكامل	-	٢	الاسبوع الحادي عشر والثاني عشر والثالث عشر
			طريقة استخدام				
عرض الامثلة والمناقشة وملاحظة مستوى الطلبة	(شرح أسئلة وأجوبة/ مناقشة)	محاضرة نظري	الكسور الاسية	التكامل	-	٢	الاسبوع الحادي عشر والثاني عشر والثالث عشر
			الكسور الاسية				



			طريقة استخدام الكسور اللوغارتمية				
عرض الامثلة والمناقشة وملاحظة مستوى الطلبة	(شرح أسئلة وأجوبة/ مناقشة)	محاضرة نظري	حل المعادلات التفاضلية	التفاضل	-	٢	الاسبوع الرابع عشروخامس عشر

الوحدة النمطية للاسبوع الاول والثاني والثالث والرابع والخامس والسادس والسابع والثامن اولا : النظرة الشاملة

أ – الفئة المستهدفة Target population

طلبة المرحلة الاولى – قسم التقنيات الالكترونية المعهد التقني / الدور

ب – مبررات الوحدة

تم تصميم هذه الوحدة لكي يتعرف الطالب على اسس الرياضيات وتطبيقاتها وانواعها

ت – الفكرة المركزية (Central Idea)

اولا : التعرف على المسافة والسرعة والتعجيل، تطبيقات فيزيائية، تطبيقات هندسية، رسم الدوال، رسم الدالة المثلثية

ثانيا : حل المعادلات الدوال الاسية، اللوغارتمية، النهايات العظمى، النهايات الصغرى نقاط الانقلاب، المحاذيات

ثالثا : حل الامثلة التكامل، القوانين وعلاقته بالتفاضل، التكامل المحدد، التكامل الغير المحدد، تطبيقات التكامل

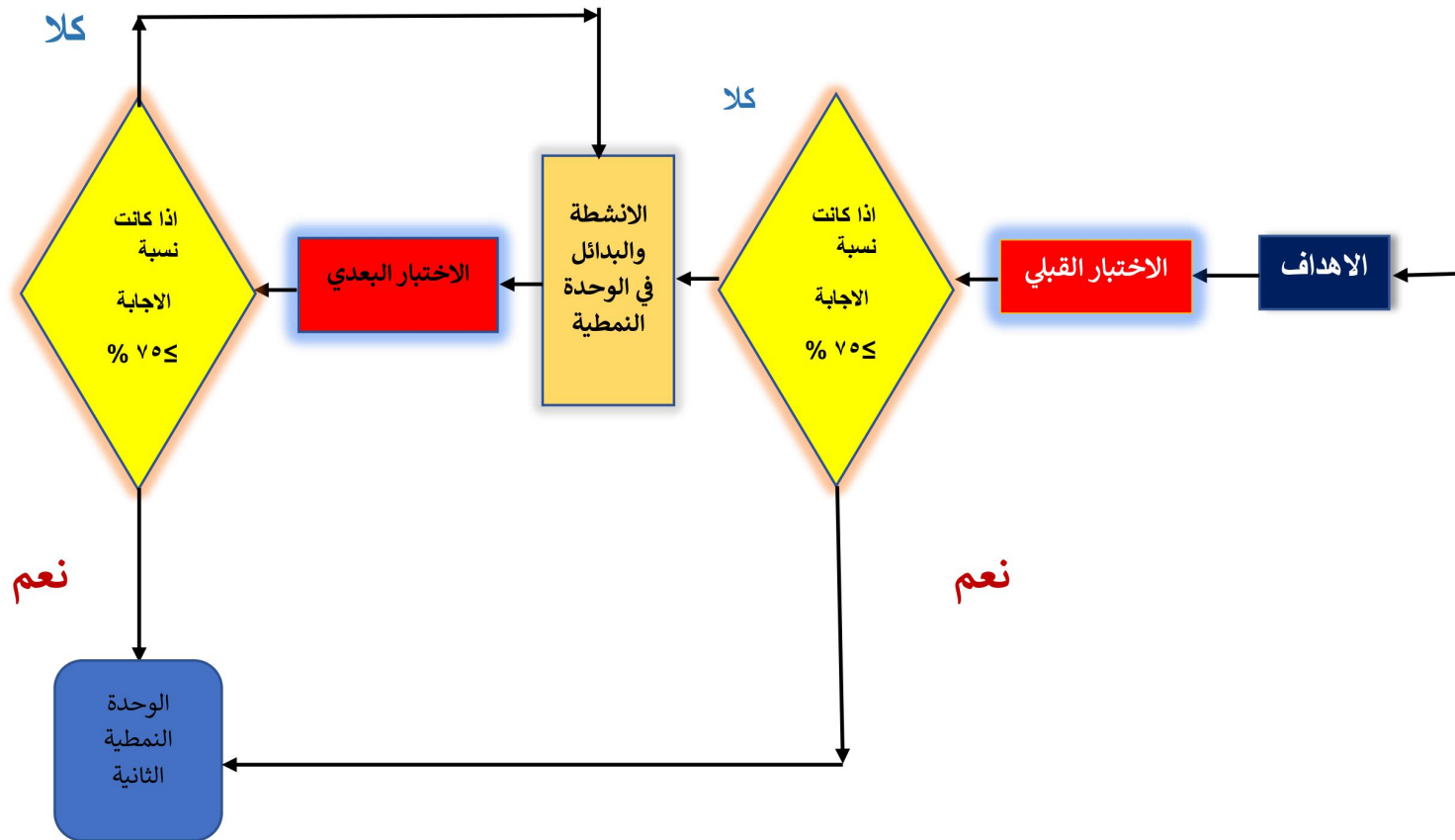
رابعا : حل مسائل المساحة تحت المنحنيين، المساحة بين المنحنيين، المساحة التقريبية، الحجوم الدورانية مع الاهتمام بالرسم

ت – اهداف الوحدة

سيكون الطالب بعد انتهاء المحاضرة قادرا على ان :

1. التعرف على المسافة والسرعة والتعجيل، تطبيقات فيزيائية، تطبيقات هندسية، رسم الدوال، رسم الدالة المثلثية
2. حل مسائل الرياضية بدقة
3. حل الامثلة التكامل، القوانين وعلاقته بالتفاضل، التكامل المحدد، التكامل الغير المحدد، تطبيقات التكامل

ج - مخطط انسيابي للتدريب بواسطة الوحدة النمطية



ثانيا : الاختبار القبلي

ضع دائرة حول الاجابة الصحيحة لكل مما ياتي :

- ١ - جد مشتقة الدالة $y = f(x) = \sqrt{x}$ تم احسب ميل المستقيم المماس للدالة عند النقطة (٢, ٤)
- (a) ٤/١
- (b) ٤/٣

- ٢ - جد مشتقة الدالة $y = x^2$
- (a) x
- (b) 2x

- ٣ - جد مشتقة الدالة $y = \sin 2x^2$
- (a) $4x \cos 2x^2$
- (b) $4x \cos 2x$

- ٤ - جد مشتقة الدالة $y = \ln x$
- (a) $\frac{1}{x}$
- (b) $\frac{2}{x}$

ملاحظة

يرجى التحقق من سلامة اجابتك بمراجعة صفحة (مفاتيح الاجابات على الاختبارات) في نهاية الوحدة. ففي حالة حصولك على نسبة اجابة ١٠٠ % فتكون غير محتاج لدراسة هذه المحاضرة واذهب لدراسة الوحدة الثانية. اما في حالة حصولك على درجة اقل من ١٠٠ % فستكون بحاجة لدراسة هذه الوحدة.

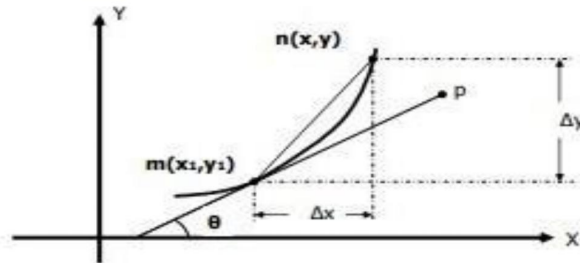
ثالثا : عرض الوحدة النمطية

•• الاشتقاق DERIVATION ••

التفسير الهندسي للمشتقة :

نرسم منحنى الدالة $y = f(x)$ والقاطع mn بين النقطتين $m(x_1, y_1), n(x, y)$ وترسم المماس mp من نقطة m والذي يصنع زاوية θ مع المحور x . ميل القاطع mn هو $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ وميل المماس mp هو $\tan \theta$. فإذا فرضنا ان النقطة n تحركت على المنحني باتجاه m فان Δx تأخذ بالصغر حتى تقترب من الصفر وان القاطع mn ينطبق تدريجيا على المماس mp , وبالتالي فان ميل القاطع mn سيقترب من ميل المماس mp

$$\therefore \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \theta = \frac{dy}{dx} \quad \text{مشتقة الدالة عند النقطة } m$$



اذن ميل المستقيم المماس للدالة $y = f(x)$ عند النقطة (x, y) هو مشتقة الدالة عند هذه النقطة , ويكتب الرمز الرياضي للمشتقة على الصورة التالية :

$$\therefore f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

مثال: جد مشتقة الدالة $y = f(x) = \sqrt{x}$ ثم احسب ميل المستقيم المماس للدالة عند النقطة $(4, 2)$.

$$\begin{aligned} \text{الحل :} \quad f'(x) &= \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \times \frac{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

بما ان الميل $\frac{dy}{dx}$, ولإيجاد قيمة الميل نعوض عن x بـ (4) في مشتقة الدالة :

$$m = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

● Limits الغايــــــــــــــــات ●

يقال أن غاية $f(x)$ عندما x تقترب من x_0 هي L وتكتب :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

إذا كانت $f(x)$ تقترب من L , كلما اقتربت x من x_0 دون أن تساويها . إذن :
 (1) يجب أن تكون الدالة $f(x)$ معرفة على جهتي x_0 , ولا يشترط أن تكون معرفة عند x_0
 (2) لا حاجة لإيجاد قيمة $f(x_0)$ لحساب غاية الدالة عند x_0 لأنه ربما تكون $f(x_0)$ غير معرفة

قوانين في الغاية :

$$1) f(x) = C$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} f(x) = C$$

إذا كانت الدالة تساوي الثابت C :

$$2) \lim_{x \rightarrow a} k f(x) = k \lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad K = \text{constant}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = [\lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)]$$

$$4) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \times g(x)] = [\lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} g(x)]$$

$$5) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

أمثلة :

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} (2x + 3) = 2 \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 3 = 2(2) + 3 = 7$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4} = \frac{4 - 4}{4 + 4} = \frac{0}{8} = 0$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 2)(x - 1)}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 2)}{(x - 1)} = \frac{3}{0} = \infty$$

بما ان الناتج ∞ إذن الغاية غير موجودة not exist

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{1^2 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0} \quad \text{نعوض عن قيمة } x = 1$$

نجد أن المقدار يساوي $(\frac{0}{0})$ وهي قيمة غير معرفة , لذا نفوم بالبحث عن الحل اما بالتحليل الى العوامل الاولى او بالضرب في المرافق , وكما يلي :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)} = x + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 + x} - 2}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 + x} - 2}{x} = \frac{\sqrt{4 + 0} - 2}{0} = \frac{0}{0} \quad (\text{القيمة غير معرفة})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 + x} - 2}{x} \times \frac{\sqrt{4 + x} + 2}{\sqrt{4 + x} + 2} \quad \text{نضرب } x \text{ مرافق البسط}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 + x - 4}{x(\sqrt{4 + x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{4 + x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4 + x} + 2} = \frac{1}{4}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x^2 - x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{(x - \sqrt{x})(x + \sqrt{x})}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{(x - \sqrt{x})}}{\sqrt{(x + \sqrt{x})}} = \frac{\sqrt{(1 - \sqrt{1})}}{\sqrt{(1 + \sqrt{1})}} = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 2}{4x^3 - 1}$$

عندما تكون النهاية ∞ نقسم حدود البسط والمقام

على x الموجودة بأعلى أس ثم نعوض

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{4 - \frac{1}{x^3}} = \frac{0}{4} = 0$$

نقسم كل الحدود على x^3

$$8) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} = \frac{2}{0} = \infty$$

الغاية غير موجودة

•• الاشتقاق DERIVATION ••

• رموز الاشتقاق •

رمز المشتقة الأولى: $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, y'

رمز المشتقة الثانية: $f''(x)$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$, y''

وهكذا
رمز المشتقة الثالثة: $f'''(x)$, $\frac{d^3 y}{dx^3}$, y'''

قوانين اتحاد المشتقة لبعض الدوال

(1) مشتقة الدالة الثابتة تساوي صفراً: $y = f(x) = c$

حيث أن c قيمة ثابتة: $y' = \frac{dy}{dx} = 0$

(2) مشتقة الدالة $y = x^n$:

$$y = x^n \Rightarrow y' = n x^{n-1}$$

(3) مشتقة حاصل ضرب دالتين: $y = u \cdot v$

$$y' = u \cdot v' + v \cdot u'$$

الأولى × مشتقة الثانية + الثانية × مشتقة الأولى

(4) مشتقة حاصل قسمة دالتين: $y = \frac{u}{v}$

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

(5) مشتقة مقدار داخل قوس مرفوع الى قوة معينة : $y = f(x)$

$$\frac{d(y)^n}{dx} = n y^{n-1} \frac{dy}{dx} \quad \text{مشتقة الكل} \times \text{مشتقة داخل القوس}$$

امثلة محلولة :

1) $y = x^3 \Rightarrow y' = 3x^2$: جد مشتقة الدوال التالية :

2) $y = 2\sqrt{x} \Rightarrow y = 2(x)^{\frac{1}{2}}$

$$y' = 2 \left(\frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} \right) = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

3) $y = x^3 - 5x^2 + x - 4 \Rightarrow y' = 3x^2 - 10x + 1 - 0$

$$y'' = 6x - 10 \quad : y'' \text{ ولإيجاد المشتقة الثانية}$$

$$y''' = 6 \quad \text{ونستمر بالاشتقاق :}$$

(2) جد مشتقة المقدار : $y = (x^2 - 2x)^4$

$$\frac{dy}{dx} = 4(x^2 - 2x)^3 [2x - 2] = 8(x^2 - 2x)^3 (x - 1)$$

(3) جد مشتقة المقدار : $y = x^2 \sqrt{4-x}$

$$y' = x^2 \left[\frac{1}{2} (4-x)^{-\frac{1}{2}} (-1) \right] + (4-x)^{\frac{1}{2}} [2x]$$

$$y' = \frac{-x^2}{2\sqrt{4-x}} + 2x\sqrt{4-x}$$

(4) إذا كانت الدالة : $y = f(x) = \frac{2x+1}{3x+1}$ جد : $f'(0)$, $f''(1)$

$$f'(x) = \frac{(3x+1) \times 2 - (2x+1) \times 3}{(3x+1)^2} = \frac{6x+2-6x-3}{(3x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{(3x+1)^2} \Rightarrow f'(0) = -1$$

$$f''(x) = 2(3x+1)^{-3}(3) \Rightarrow f''(1) = \frac{6}{64} = \frac{3}{32}$$

مشتقة الدالة الضمنية Implicit Function:

نقول عن هذه الدالة ، بان y' هي دالة ضمنية الى x : $xy + x - 2y = 1$ ولايجاد y' نشق كل حد بالنسبة الى x ونم نستخرج y' :

$$xy' + y(1) + (1) - 2y' = 0$$

$$y'(x-2) = -y-1 \Rightarrow y' = \frac{-y-1}{x-2}$$

●●●قوانين مشتقة الدوال المثلثية●●●

$$y = \sin a \quad \text{1) مشتقة } \sin a, \text{ حيث ان } a = f(x) \quad \therefore$$

$$y' = \cos a \frac{da}{dx}$$

$$y = \cos a \quad \text{2) مشتقة } \cos a, \text{ حيث ان } a = f(x) \quad \therefore$$

$$y' = -\sin a \frac{da}{dx}$$

$$y = \tan a \quad \text{3) مشتقة } \tan a, \text{ حيث ان } a = f(x) \quad \therefore$$

$$y' = \sec^2 a \frac{da}{dx}$$

$$y = \cot a \quad \text{4) مشتقة } \cot a, \text{ حيث ان } a = f(x) \quad \therefore$$

$$y' = -\operatorname{cosec}^2 a \frac{da}{dx}$$

$$y = \sec a \quad \text{5) مشتقة } \sec a, \text{ حيث ان } a = f(x) \quad \therefore$$

$$y' = \sec a \tan a \frac{da}{dx}$$

$$y = \operatorname{cosec} a \quad \text{6) مشتقة } \operatorname{cosec} a, \text{ حيث ان } a = f(x) \quad \therefore$$

$$y' = -\operatorname{cosec} a \cot a \frac{da}{dx}$$

امثلة محلولة:-

1)جد مشتقة الدوال التالية : 1)

$$y = \sin 2x^2$$

$$y' = \cos 2x^2 [4x] = 4x \cos 2x^2$$

$$2) \ y = \cos^{-3} \frac{x}{3}$$

$$y' = -3 \cos^{-4} \frac{x}{3} \left[-\sin \frac{x}{3} \left(\frac{1}{3} \right) \right] = \cos^{-4} \frac{x}{3} \sin \frac{x}{3}$$

3)

$$y = \sqrt{x} \tan \sqrt{x}$$

$$y' = \sqrt{x} \left[\sec^2 \sqrt{x} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \right] + \tan \sqrt{x} \left[\frac{1}{2\sqrt{x}} \right]$$

$$y' = \frac{1}{2} \left[\sec^2 \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \tan \sqrt{x} \right]$$

$$4) \ y = \cot (x^2 + x)^2$$

$$y' = -\operatorname{cosec}^2 (x^2 + x)^2 [2(x^2 + x)(2x + 1)]$$

$$y' = -2(x^2 + x)(2x + 1) \operatorname{cosec}^2 (x^2 + x)^2$$

$$5) \ y = \sec^2 \frac{1}{2x}$$

$$y' = 2 \sec \frac{1}{2x} \left[\sec \frac{1}{2x} \tan \frac{1}{2x} \right] \left[\frac{-1}{2x^2} \right]$$

$$y' = \frac{-1}{x^2} \sec^2 \frac{1}{2x} \tan \frac{1}{2x}$$

$$6) \ y = \cot (\omega t + \pi)$$

constant : ω حيث إن

$$\frac{dy}{dt} = -\operatorname{cosec}^2 (\omega t + \pi) [\omega + 0] = -\omega \operatorname{cosec}^2 (\omega t + \pi)$$

$$f(x) = 3 \operatorname{cosec} x \cdot \cot x \quad : \text{جد } f' \left(\frac{\pi}{2} \right) \text{ للدالة}$$

الحل :

$$f'(x) = 3 [\operatorname{cosec} x \cdot (-\operatorname{cosec}^2 x) + \cot x \cdot (-\operatorname{cosec} x \cdot \cot x)]$$

$$f'(x) = -3 \operatorname{cosec}^3 x - 3 \operatorname{cosec} x \cdot \cot^2 x$$

$$f'(\frac{\pi}{2}) = -3 \operatorname{cosec}^3 \frac{\pi}{2} - 3 \operatorname{cosec} \frac{\pi}{2} \cdot \cot^2 \frac{\pi}{2} = -3$$

مشتقة الدالة اللوغاريتمية :-

$$y = \ln u \quad u = f(x)$$

$$y' = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

أمثلة : جد مشتقة ما يلي :

1) $y = x \ln(x^2 + 1)$

$$y' = x \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} + \ln(x^2 + 1) \cdot (1) = \frac{2x^2}{x^2 + 1} + \ln(x^2 + 1)$$

2) $y = (\ln \sec x)^2$

$$y' = 2(\ln \sec x) \left[\frac{1}{\sec x} \cdot (\sec x \tan x) \right] = 2 \tan x \cdot \ln \sec x$$

3) $y = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \ln \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}}{(1-x)^{\frac{1}{2}}} = \ln(1+x)^{\frac{1}{2}} - \ln(1-x)^{\frac{1}{2}}$

$$= \frac{1}{2} \ln(1+x) - \frac{1}{2} \ln(1-x) = \frac{1}{2} [\ln(1+x) - \ln(1-x)]$$

$$y' = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1+x} \cdot 1 - \frac{1}{1-x} \cdot (-1) \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1-x+1+x}{(1-x^2)} \right)$$

$$y' = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{(1-x^2)} \right] = \frac{1}{(1-x^2)}$$

مثال: جد قيم كل من: $f'(\frac{\pi}{3})$, $f''(\frac{\pi}{6})$, $f'''(\frac{\pi}{4})$ للدالة :

$$f(x) = 4 \cos^2 x - 3 \ln \sec x$$

$$f'(x) = 8 \cos x (-\sin x) - 3 \frac{1}{\sec x} \cdot \sec x \cdot \tan x$$

الحل:

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -8 \cos \frac{\pi}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{3} - 3 \tan \frac{\pi}{3} = -8 \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 3\sqrt{3} = -5\sqrt{3}$$

$$f''(x) = -8 \cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot (8 \sin x) - 3 \sec^2 x$$

$$f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -8 \cos^2 \frac{\pi}{6} + 8 \sin^2 \frac{\pi}{6} - 3 \sec^2 \frac{\pi}{6}$$

$$f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -8 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 8 \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = -6 + 2 - 4 = -8$$

$$f''(x) = -8 \cos^2 x + 8 \sin^2 x - 3 \sec^2 x = -8(\cos 2x) - 3 \sec^2 x$$

$$f'''(x) = -8[-\sin 2x(2)] - 3[2 \sec x(\sec x \cdot \tan x)]$$

$$f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = 16 \sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right) - 6 \sec^2 \frac{\pi}{4} \cdot \tan \frac{\pi}{4} = 16(1) - 6(\sqrt{2})^2(1) = 4$$

مشتقة الدالة الاسية :-

الدالة الاسية هي كل دالة على شكل $y = a^u$ حيث ان $u = f(x)$ وفيها المتغير المستقل x هو أس لمقدار ثابت هو a والمتغير المعتمد هو y .

$$\frac{dy}{dx} = a^u \cdot \frac{du}{dx} \cdot \ln a$$

القانون العام هو :

$$1) \quad y = 5^{x^2+x-1} \quad \text{مثال (1) جد مشتقة ما يلي :}$$

$$y' = 5^{x^2+x-1} \cdot [2x+1] \cdot \ln 5$$

$$2) \quad y = 3e^{\tan x} \Rightarrow y' = 3e^{\tan x} \sec^2 x \cdot \ln e \Rightarrow y' = \frac{3e^{\tan x}}{\cos^2 x}$$

$$y = (\sin x)^{\cos x} \quad \text{مثال (2) جد مشتقة الدالة :}$$

الحل : عندما لا يكون الاساس قيمة ثابتة :

$$\ln y = \ln (\sin x)^{\cos x} = \cos x \cdot \ln \sin x \quad (1) \text{ نأخذ } \ln \text{ الطرفين :}$$

(2) نشتق الطرفين بالنسبة لـ x :

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \cos x \cdot \frac{1}{\sin x} (\cos x) + \ln \sin x \cdot (-\sin x)$$

$$\frac{dy}{dx} = (\sin x)^{\cos x} (\cot x \cdot \cos x - \sin x \cdot \ln \sin x)$$

مشتقة الدالة المركبة (الدالة البارامترية) : Parametric differentiation

في بعض الحالات يكون كل من x و y متغير يعتمد على متغير ثالث مثل u يسمى بـ Parameter كما في الدالتين : $y = f(u)$, $x = g(u)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \frac{dy/du}{dx/du} \quad \text{ولحساب المشتقة في هذه الحالة فان :}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{du} \left(\frac{dy}{dx} \right) \times \frac{du}{dx} \quad \text{اما المشتقة الثانية فنساوي :}$$

ويمكن حساب $\frac{d^2 y}{dx^2}$ اذا كانت المشتقة الاولى بالنسبة الى متغيرين او اكثر كالتالي :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, t) \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, t, u) \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dx} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx}$$

مثال 1: جد $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$ اذا كانت : $y = 1 + u^2$, $x = 2 + u$

$$\frac{dy}{du} = 2u \quad \text{الحل : أولا نجد مشتقة } y \text{ بالنسبة الى } u$$

$$\frac{dx}{du} = 1 \quad \text{ومشتقة } x \text{ بالنسبة الى } u$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/du}{dx/du} = \frac{2u}{1} = 2u \Rightarrow \therefore \frac{dy}{dx} = 2(x - 2) = 2x - 4$$

لايجاد $\frac{d^2 y}{dx^2}$ نشق $\frac{dy}{dx}$ بالنسبة الى u :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{du} \left(\frac{dy}{dx} \right) \times \frac{du}{dx} = 2 \times 1 = 2$$

مثال 2: جد $\frac{dy}{dx}$ ، $\frac{d^2 y}{dx^2}$ إذا كانت $y = \cos 2t$ ، $x = 2 \sin t$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{-2 \sin 2t}{2 \cos t}$$

الحل :

ولكن : $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$ ، $\frac{dy}{dx} = -2 \sin t = -2 \sin(\sin^{-1}(\frac{x}{2}))$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \times \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt} (-2 \sin t) \times \frac{1}{2 \cos t}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -2 \cos t \times \frac{1}{2 \cos t} = -1$$

مثال 3: جد مشتقة الدالة البارامترية $\frac{dy}{dx}$ من الدالتين :

$$y = \sin t + t , \quad x = t^2 + e^t$$

الحل :

$$\frac{dy}{dt} = \cos t + 1 , \quad \frac{dx}{dt} = 2t + e^t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \div \frac{dx}{dt} = \frac{\cos t + 1}{2t + e^t}$$

تمارين :

(1) جد $\frac{dy}{dx}$ ، $\frac{d^2 y}{dx^2}$ للدوال البارامترية التالية :

$$y = (1 + t)^2 , \quad x = 2t$$

$$y = 2 \sin^2 \theta , \quad x = 3 \cos^2 \theta$$

$$y = 3(\theta - \sin \theta) , \quad x = 4(1 + \cos \theta)$$

تمارين في حساب المماس والعمود للدالة

1) جد ميل المماس للمنحني $y = x^2 + 1$ عند النقطة $(-1, 2)$ ثم جد معادلة المماس والعمود على المنحني في تلك النقطة .

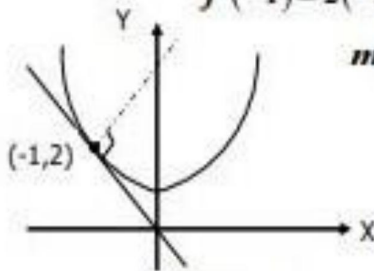
الحل : $y = f(x) = x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 2x$

ميل المماس للمنحني عند النقطة $(-1, 2)$: $f'(-1) = 2(-1) = -2$

معادلة المستقيم بدلالة الميل هي : $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$

اذن : $y_1 = 2$, $x_1 = -1$

$$-2 = \frac{y - 2}{x - (-1)}$$



معادلة مماس الدالة : $y - 2 = -2x - 2 \Rightarrow y + 2x = 0$

ميل العمود على المماس $\bar{m}$ هو المقطوب السالب لميل مماس الدالة : $\bar{m} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$

معادلة العمود : $\frac{1}{2} = \frac{y - 2}{x - (-1)} \Rightarrow 2y - x - 5 = 0$

2) جد النقطة على المنحني $y = x^2 - 6x + 8$ التي يكون المماس فيها افقياً .
الحل : بما ان المماس افقياً , اذن ميله يساوي صفر

اذن نشتق معادلة المنحني ونساويها بالصفر : $y' = 2x - 6 \Rightarrow 0 = 2x - 6$
نجد قيمة x : $\therefore 2x = 6 \Rightarrow x = 3$

الان نجد y من الدالة الاصلية : $y = 3^2 - 6(3) + 8 = -1$, اذن النقطة هي : $(3, -1)$

3) جد النقطة على المنحني : $y = f(x) = 2\sqrt{x}$ والتي يكون المماس فيها موازياً للمستقيم : $x - 3y + 5 = 0$

الحل : ملاحظة : تكون المستقيمان متوازيين

إذا تساوى ميلها : $m_1 = m_2$

نجد ميل المستقيم من معادلته وذلك بقسمة (سالب معامل x) على (معامل y) :

$$\therefore m = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore m = \frac{1}{3} = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \sqrt{x} = 3 \Rightarrow \therefore x = 9$$

نجد قيمة y من الدالة الأصلية : $f(9) = 2\sqrt{9} = 6$: $\therefore$ النقطة هي $P(9, 6)$

(4) جد ميل المنحني $y = f(x) = \cos 3x$ عند النقطة $x = \frac{\pi}{3}$ ثم اوجد معادلة

المماس عند النقطة نفسها .

الحل :

نشتق المعادلة لإيجاد الميل

$$f'(x) = -3\sin 3x \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -3\sin 3\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$y = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos 3\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1$$

نجد y' من الدالة الأصلية :

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow 0 = \frac{y - (-1)}{x - \frac{\pi}{3}} \Rightarrow \therefore y = -1$$

الآن نجد معادلة المماس :

(5) جد النقاط على المنحني $y = 2 \sin x \cos x - \cos 2x$ والتي يكون المماس للمنحني عندها موازيا للمحور x ضمن الفترة $0 \leq x \leq 2\pi$

الحل :

المماس موازي للمحور x أي ميله يساوي صفر

$$y' = 2[\sin x(-\sin x) + \cos x \cdot \cos x] - (-\sin 2x)(2)$$

$$y' = 2[-\sin^2 x + \cos^2 x] + 2 \sin 2x = 2 \cos 2x + 2 \sin 2x = 0$$

$$\therefore 2 \sin 2x = -2 \cos 2x \Rightarrow \therefore \tan 2x = -1$$

نقسم على $\cos 2x$:

ظل الزاوية سالب في الربع الثاني والرابع :

$$\therefore \text{either } 2x = 180 - 45 = 135 \times \frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{4} \quad \therefore x = \frac{3\pi}{8}$$

$$\therefore \text{or } 2x = 360 - 45 = 315 \times \frac{\pi}{180} = \frac{7\pi}{4} \quad \therefore x = \frac{7\pi}{8}$$

$$\frac{3\pi}{8} = 67.5^\circ, \quad \frac{7\pi}{8} = 157.5^\circ$$

نجد y من الدالة الأصلية :

$$y = f(67.5^\circ) = 2 \sin 67.5^\circ \cdot \cos 67.5^\circ - \cos 2(67.5^\circ) = 1.414$$

$$y = f(157.5^\circ) = 2 \sin 157.5^\circ \cdot \cos 157.5^\circ - \cos 2(157.5^\circ) = -1.414$$

$$(3\pi/8, 1.414), (7\pi/8, -1.414)$$

اذن النقاط هي :

تمارين في حساب النهاية

عندما تكون غاية الدالة الكسرية بعد التعويض $\frac{0}{0}$ يمكن حلها عند طريق المشتقة بان نشتق كل حد من حدود البسط والمقام ثم نعوض قيمة الغاية في الدالة ونستمر في الاشتقاق والتعويض الى ان نحصل على قيمة حقيقية من ناتج التعويض .

أمثلة محلولة :

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e}$: حد الغاية للمقادير التالية :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e} = \frac{1 - 1 + 0}{e - e} = \frac{0}{0} \quad \text{الحل :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + \frac{1}{x}}{e^x} = \frac{2 + 1}{e} = \frac{3}{e} \quad \text{نشتق البسط والمقام ونعوض :}$$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{0 - 0}{0} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0} \quad \text{نشتق البسط والمقام :}$$

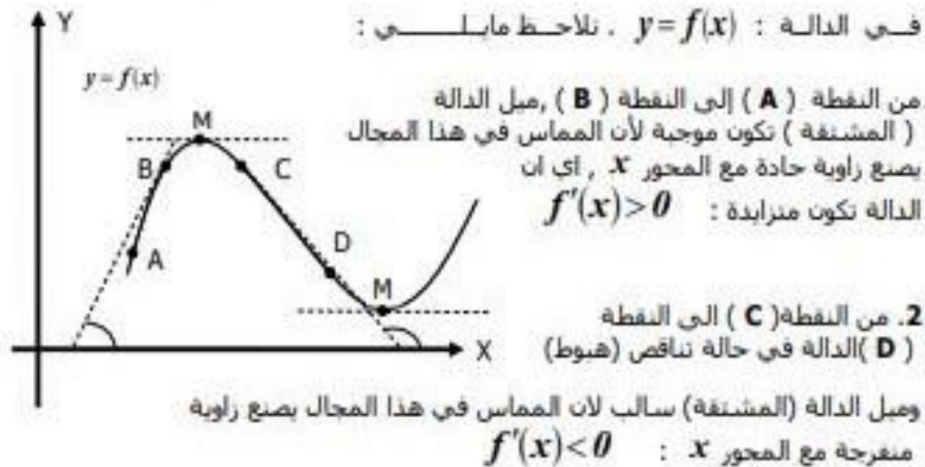
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{0}{0} \quad \text{الان نشتق البسط والمقام مرة ثانية ثم نعوض :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6} \quad \text{نجد المشتقة الثالثة للبسط والمقام ثم نعوض :}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cot x}{\cot 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\tan x}}{\frac{1}{\tan 2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\tan x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sec^2 2x}{\sec^2 x} = \frac{2(1)}{1} = 2$$

•• تطبيقات التفاضل ••



3 . النقطتين M_1 و M_2 هي النقاط المتطرفة للدالة وتسمى نقاط الدوران **Turning points** (نقاط النهايات العظمى والصغرى) ويكون المماس للمنحني عندهما أفقياً وموازياً للمحور x (أي ميله = صفر) ونحصل عليهما من مساواة المشتقة الأولى

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{للدالة بالصفر , أي :}$$

• طريقة إيجاد نقاط الدوران (النهايات العظمى والصغرى) للدالة •

نجد أولاً المشتقة الأولى $f'(x)$ للدالة ونساويها بالصفر ثم نجد منها قيم x ونعوضها في المشتقة الثانية للدالة $f''(x)$, فإذا كانت إشارة المشتقة الثانية بعد التعويض :

(1) إشارة موجبة $f''(x) > 0$ فالنقطة نهاية صغرى

(2) إشارة سالبة $f''(x) < 0$ فالنقطة نهاية عظمى

(3) أما إذا كانت قيمة المشتقة الثانية بعد التعويض تساوي صفر , نستخدم الطريقة التالية لتحديد نوع النهاية :

نأخذ قيم x التي تجعل المشتقة الأولى تساوي صفر , ونأخذ لها قيم أصغر وأكبر منها بقليل ونعوضها في المشتقة الأولى $f'(x)$, فإذا غيرت المشتقة الأولى إشارتها بعد التعويض :-

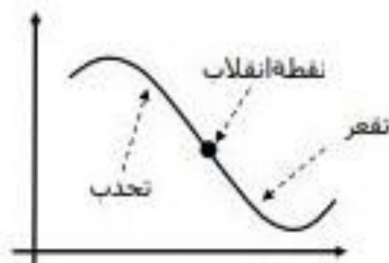
(أ) من الموجب إلى السالب فإن قيمة x تلك تمثل النهاية العظمى للدالة .

(ب) من السالب إلى الموجب فإن قيمة x تلك تمثل النهاية الصغرى للدالة .
(ج) إذا لم تتغير إشارة المشتقة الأولى بعد التعويض بالنقطة لا هي نهاية عظمى ولا صغرى

•• نقطة انقلاب الدالة (التحول) ••

وهي النقاط التي تكون عندها المشتقة الثانية للدالة تساوي صفراً $f''(x)=0$, وينحول فيها منحنى الدالة من التفرع concave down (وفيها تكون المشتقة الثانية للدالة موجبة $f''(x)>0$) إلى التحدب concave up (وفيها المشتقة الثانية سالبة $f''(x)<0$) . لإيجاد نقطة انقلاب الدالة نتبع ما يلي :

1. نجد المشتقة الثانية ونجعلها تساوي صفراً $(f''(x)=0)$ فنجد قيمة x .
2. نأخذ قيمة أصغر ثم أكبر من x ونعوضها في المشتقة الثانية (y'') ونلاحظ إشارة المشتقة الثانية فإذا تغيرت من الموجب إلى السالب أو بالعكس فإن النقطة هي نقطة انقلاب .
3. نجد قيمة y من الدالة الأصلية .



مثال : نجد نقطة انقلاب الدالة : $y = f(x) = x^3 + 1$

$$\begin{aligned} \text{الحل : } y' = f'(x) = 3x^2 &\Rightarrow y'' = 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \text{نأخذ } x = -1 &y'' = f''(-1) = -6 \\ \text{نأخذ } x = 1 &y'' = f''(1) = 6 \end{aligned}$$

بما أن المشتقة الثانية غيرت إشارتها فإن النقطة $x=0$ هي نقطة انقلاب
نجد قيمة y من الدالة الأصلية

$$y = f(0) = 0 + 1 = 1 \quad \therefore \text{نقطة الانقلاب هي : } (0, 1)$$

•• تمارين محلولة ••

(1) : نجد نقاط الدوران (نقاط النهايات العظمى والصغرى) ونقاط الانقلاب إن وجدت

للدالة : $y = f(x) = x^2 - 4x + 3$ مع الرسم

الحل : لرسم الدالة نتبع الطريقة التالية :

1. إيجاد نقاط التقاطع مع المحاورين x و y .
2. إيجاد نقاط الدوران وفترات التزايد والتناقص عن طريق $f'(x)$.
3. إيجاد نقاط الانقلاب وفترات التحدب والتفرع عن طريق $f''(x)$.

1. نجد نقاط التقاطع مع المحاورين :

$$\begin{aligned} y = x^2 - 4x + 3 = 0 &\quad \text{نقطة التقاطع مع المحور } x \text{ هي :} \\ (x-3)(x-1) = 0 &\Rightarrow x = 3, \quad x = 1 \end{aligned}$$

نقاط التقاطع مع المحور y هي : $y = f(0) = 0^2 - 4(0) + 3 = 3$
 نقاط التقاطع مع المحورين هي : $(3,0)$, $(1,0)$, $(0,3)$

2. نقاط الدوران (النهايات) : $x = 2 \Rightarrow y' = f'(x) = 2x - 4 = 0$
 نختبر قيمة x في المشتقة الثانية : نهاية صغرى $y'' = f''(x) = 2 > 0$

نجد قيمة y من الدالة الأصلية : $y = f(2) = 2^2 - 4(2) + 3 = -1$
 إذن النقطة $(2, -1)$ نقطة نهاية صغرى .

3. نقاط الانقلاب : المشتقة الثانية تساوي قيمة ثابتة $y'' = f''(x) = 2$
 إذن لا يوجد نقاط انقلاب .

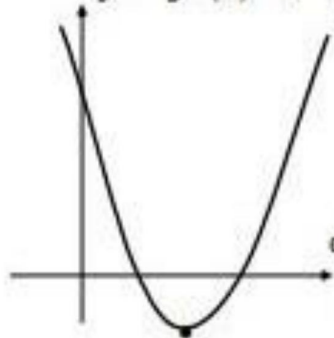
x	-1	0	1	2	3	4
y	8	3	0	-1	0	3

فترات التزايد : $\{x : x > 2\}$

فترات التناقص : $\{x : x < 2\}$

منطق الدالة : $\{x : x \in R\} = (-\infty, \infty)$

مدى الدالة : $\{y : y \geq -1\} = [-1, \infty)$



(2) جد النقاط المنطرفة (النهايات العظمى والصغرى) وفترات التزايد والتناقص , ثم جد
 نقاط الانقلاب (إن وجدت) للدالة التالية مع الرسم : $y = f(x) = (x-2)(x^2 - x - 2)$

الحل :

1) نجد نقاط التقاطع : مع المحور x بان نجعل $y = 0$:

$$y = (x-2)(x^2 - x - 2) = 0 \Rightarrow 0 = (x-2)(x-2)(x+1) \Rightarrow x = 2, x = -1$$

مع المحور y بان نجعل $x = 0$:

$$y = f(0) = (0-2)(0^2 - 0 - 2) = 4$$

إذن نقاط التقاطع مع المحورين هي : $(-1,0)$, $(2,0)$, $(0,4)$

2) نجد نقاط الدوران (النهايات العظمى والصغرى) بان نشتق الدالة ونساويها بالصفر :

$$y' = f'(x) = (x-2)(2x-1) + (x^2 - x - 2)(1) = 3x^2 - 6x = 0$$

$$3x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$$

نختبر النهايات في المشتقة الثانية : $f''(x) = 6x - 6$

$$f''(0) = 6(0) - 6 = -6 < 0 \text{ نهاية عظمى}$$

$$f''(2) = 6(2) - 6 = 6 > 0 \text{ نهاية صغرى}$$

نجد قيم y من الدالة الأصلية : $y = f(0) = (0-2)(0^2 - 0 - 2) = 4$

$$y = f(2) = (2-2)(2^2 - 2 - 2) = 0$$

اذن النقطة (0,4) نهاية عظمي , والنقطة (2,0) نهاية صغرى
(3) نجد نقاط الانقلاب بان نجد المشتقة الثانية ونساويها بالصفر :

$$y'' = 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$$

نختبر النقطة $x=1$ بان نأخذ قيم لـ x اصغر واكبر من (1) ونعوضها في المشتقة الثانية :

$$\text{نأخذ } x=0 : f''(0) = 6(0) - 6 = -6$$

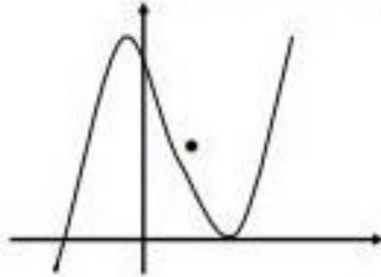
$$\text{نأخذ } x=2 : f''(2) = 6(2) - 6 = 6$$

بما ان المشتقة الثانية غيرت اشارةها , اذن النقطة نقطة انقلاب , نجد y من الدالة الاصلية:

$$y = f(1) = (1-2)(1-1-2) = 2$$

اذن النقطة (1,2) نقطة انقلاب . الان نرتب النقاط على شكل جدول :

x	-1	0	1	2	3	4
y	0	4	2	0	4	20



فترات التزايد : $\{x : x < 0\} \cup \{x : x > 2\}$

فترات التناقص : $\{x : 0 < x < 2\} = (0,2)$

منطق الدالة : $\{x : x \in R\} = (-\infty, \infty)$

مدى الدالة : $\{y : y \in R\} = (-\infty, \infty)$

(3) . ارسم منحنى الدالة $y = f(x) = \frac{1}{x-2}$

الحل : عندما تكون الدالة كسرية , نجد المحاور المماسية للدالة (العمودية و الافقية)
لايجاد المحاذيات العمودية , نكتب الدالة y بدلالة x ثم نجعل المقام = صفر

$$y = f(x) = \frac{1}{x-2} \Rightarrow x-2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

اذن المحور العمودي المماسي للدالة هو المستقيم $x = 2$
ولإيجاد المحاذيات الافقية , نكتب الدالة x بدلالة y ثم نجعل المقام = صفر

$$y = \frac{1}{x-2} \Rightarrow xy - 2y = 1 \Rightarrow x = \frac{2y+1}{y} \Rightarrow y = 0$$

اذن المحور الافقي المماسي للدالة هو المحور x , ($y=0$)

نقاط التقاطع مع المحورين :

مع المحور x , $y=0$, لا يوجد نقاط تقاطع مع المحور x
 $\theta = \frac{1}{x-2}$

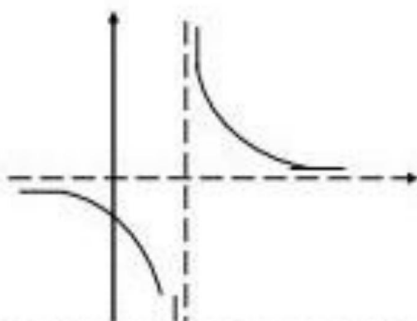
مع المحور y , $x=0$, النقطة $(0, -\frac{1}{2})$, $y = f(\theta) = \frac{1}{\theta-2} \Rightarrow y = \frac{-1}{2}$

$$y' = f'(x) = \frac{(x-2)[0] - (1)[1]}{(x-2)^2} = \frac{-1}{(x-2)^2} = 0 \quad \text{نقاط الدوران :}$$

اذن لا توجد نهايات عظمى ولا صغرى

$$y'' = f''(x) = \frac{(x-2)^2[0] - (-1)[2(x-2)(1)]}{(x-2)^4} = \frac{2}{(x-2)^3} = 0 \quad \text{نقاط الانقلاب :}$$

اذن لا توجد نقاط انقلاب .



x	-4	-2	0	1	3	4
y	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	1	$\frac{1}{2}$

مطلق الدالة : $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 2\}$

مدى الدالة : $\{y \in \mathbb{R} : y \neq 0\}$

(4) : جد نقاط الدوران (النهايات العظمى والصغرى) ونقاط الانقلاب إن وجدت للدالة:

$$y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 6$$

الحل: لايجاد نقاط النهايات نشتق الدالة ونساويها بالصفر :

$$y' = f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 0 \Rightarrow (3x-3)(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$y'' = f''(x) = 6x - 6 = 6(1) - 6 = 0 \quad \text{نختبر } x=1 \text{ في المشتقة الثانية :}$$

بما ان المشتقة الثانية تساوي صفر ، نأخذ قيم اصغر واكبر من $x=1$ ونعوضها في المشتقة الاولى لتحديد نوع النهاية:

$$y' = f'(0) = 3(0)^2 - 6(0) + 3 = 3 \quad \text{نأخذ } x=0 :$$

$$y' = f'(2) = 3(2)^2 - 6(2) + 3 = 3 \quad \text{نأخذ } x=2 :$$

بما ان اشارة المشتقة الاولى لم تتغير بعد التعويض : اذن لا توجد نهايات عظمى ولاصغرى للدالة
لايجاد نقطة الانقلاب نجد المشتقة الثانية ونساويها بالصفر :

$$y'' = 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$y'' = 6(0) - 6 = -6 \quad \leftarrow \text{نأخذ } x=0 \quad \text{نختبر النقطة } x=1 :$$

$$y'' = 6(2) - 6 = +6 \quad \leftarrow \text{نأخذ } x=2$$

اذن النقطة عند $x=1$ نقطة انقلاب ، نجد y من الدالة الاصلية :

$$y = f(1) = (1)^3 - 3(1)^2 + 3(1) - 6 = -5 \quad \text{اذن نقطة الانقلاب هي : } (1, -5)$$

(5). جد نقاط الدوران (النهايات العظمى والصغرى) ونقاط الانقلاب للدالة التالية وذلك ضمن

$$y = \sin x + \cos x \quad \text{الفترة : } 0 \leq x \leq 2\pi$$

الحل: نجد المشتقة الاولى ونساويها بالصفر :

$$y' = \cos x + (-\sin x) = \cos x - \sin x = 0$$

نقسم على $\cos x$: $\Rightarrow \therefore \tan x = 1$:
الظل موجب في الربع الاول والثالث :

$$\therefore x = 45 = 45 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4} , \quad \text{or} \quad x = 180 + 45 = 225 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{4}$$

$$y'' = -\sin x - \cos x$$

نختبر قيم x في المشتقة الثانية :

$$y'' = -\sin 45 - \cos 45 = -\sqrt{2}$$

: نهاية عظمى

$$y'' = -\sin 225 - \cos 225 = \sqrt{2}$$

: نهاية صغرى

$$y = \sin 45 + \cos 45 = \sqrt{2}$$

نجد y من الدالة الاصلية :

$$y = \sin 225 + \cos 225 = -\sqrt{2}$$

اذن النهاية العظمى هي : $(\pi/4, \sqrt{2})$, والصغرى هي : $(5\pi/4, -\sqrt{2})$

$$y'' = -\sin x - \cos x = 0$$

من المشتقة الثانية نجد نقاط الانقلاب :

$$\therefore \sin = -\cos x \Rightarrow \tan x = -1$$

نقسم على $\cos x$:

$$\therefore x = 180 - 45 = 135 \times \frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{4}$$

الظل سالب في الربع الثاني والرابع :

$$\text{or} \quad x = 360 - 45 = 315 \times \frac{\pi}{180} = \frac{7\pi}{4}$$

$$y = \sin 135 + \cos 135 = 0$$

نجد y من الدالة الاصلية :

$$y = \sin 315 + \cos 315 = 0$$

نقاط الانقلاب هي : $(3\pi/4, 0)$, $(7\pi/4, 0)$

(6). اذا كان لمنحني الدالة $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ نقطة نهاية صغرى عند $x=2$ ونقطة انقلاب عند $x=1$ جد قيمة a, b .

الحل : للدالة نهاية صغرى عند $x=2$, اذن نشتق الدالة ونساويها بالصفر :

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow f'(2) = 3(2)^2 + 2a(2) + b = 0 \Rightarrow b = -12 - 4a$$

ونقطة انقلاب عند $x=1$, اذن نجد المشتقة الثانية ونساويها بالصفر :

$$f''(x) = 6x + 2a \Rightarrow f''(1) = 6(1) + 2a = 0 \Rightarrow a = -3$$

$$\therefore b = -12 - 4(-3) = 0$$

رابعاً : الاختبار البعدي

ضع دائرة حول الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

١ - جد المشتقة $y = 4x^{-4}$

(a) $-8x^{-5}$

(b) $8x^5$

٢ - جد المشتقة للدالة المثلثية $y = \cos x$

(a) $-\sin x$

(b) $\sin x$

مفاتيح الإجابة على الاختبارات

الاختبار البعدي		الاختبار القبلي	
الإجابة الصحيحة	رقم السؤال	الإجابة الصحيحة	رقم السؤال
A	١	A	١
B	٢	B	٢
		A	٣
		A	٤

الوحدة النمطية للأسبوع التاسع والعاشر والحادي عشر والثاني عشر والثالث عشر والرابع عشر والخامس عشر

اولا : النظرة الشاملة

أ – الفئة المستهدفة (Target Population)

طلبة المرحلة الاولى – قسم تقنيات الالكترونية المعهد التقني / الدور

ب – مبررات الوحدة

تم تصميم هذه الوحدة لكي يتعرف الطالب على ايجاد طول قوس المنحني، تطبيقات مختلفة، طرق عامة في التكامل، طريقة التعويض، طريقة التجزئة، طريقة استخدام الكسور الجزئية، طريقة استخدام الكسور الاسية، طريقة استخدام الكسور اللوغارتمية، حل المعادلات التفاضلية.

ت – الفكرة المركزية (Central Idea)

اولا : التعرف على ايجاد طول قوس المنحني، تطبيقات مختلفة، طرق عامة في التكامل

ثانيا : حل المعادلات طريقة التعويض، طريقة التجزئة

ثالثا : حل الامثلة طريقة استخدام الكسور الجزئية، طريقة استخدام الكسور الاسية

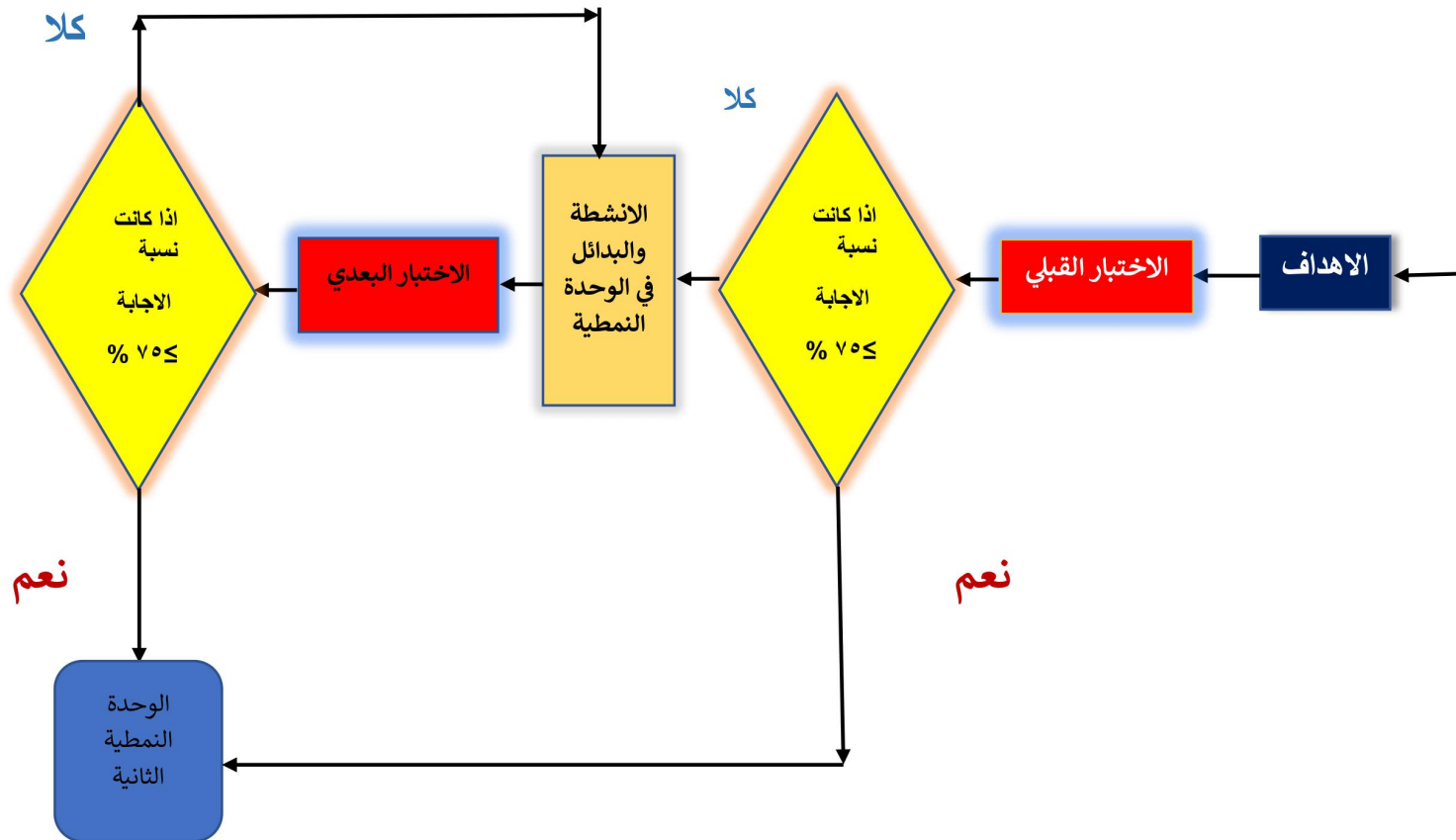
رابعا : حل مسائل طريقة استخدام الكسور اللوغارتمية، حل المعادلات التفاضلية

ث – اهداف الوحدة

سيكون الطالب بعد انتهاء المحاضرة قادرا على ان :

1. التعرف على ايجاد طول قوس المنحني، تطبيقات مختلفة، طرق عامة في التكامل
2. حل المعادلات طريقة التعويض، طريقة التجزئة
3. حل الامثلة طريقة استخدام الكسور الجزئية، طريقة استخدام الكسور الاسية
4. حل مسائل طريقة استخدام الكسور اللوغارتمية، حل المعادلات التفاضلية

ج - مخطط انسيابي للتدريب بواسطة الوحدة النمطية



ثانيا : الاختبار القبلي

ضع دائرة حول الاجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

١ - جد ناتج التكامل $\int 3x \, dx$

$\frac{3x^2}{2}$ (a)

$2x^2$ (b)

٢ - جد التكامل للدالة التالية $\int 2 \, dx$

$X + c$ (a)

$2x + c$ (b)

٣ - جد تكامل $\int 3 + 2 + 1$

$X + x + x + c$ (a)

$3x + 2x + x + c$ (b)

ملاحظة

يرجى التحقق من سلامة اجابتك بمراجعة صفحة (مفاتيح الاجابات على الاختبارات) في نهاية الوحدة. ففي حالة حصولك على نسبة اجابة ١٠٠ % فتكون غير محتاج لدراسة هذه المحاضرة واذهب لدراسة الوحدة الثانية. اما في حالة حصولك على درجة اقل من ١٠٠ % فستكون بحاجة لدراسة هذه الوحدة.

ثالثا : عرض الوحدة النمطية

(7). اذا كانت النقطة (2,1) هي نهاية صغرى للدالة : $f(x) = a + (x - b)^2$ فجد قيمة كل من a, b .
الحل: بما ان النقطة (2,1) نهاية صغرى للدالة , فهي تنتمي لمجال الدالة وتحقق المعادلة :

$$f(x) = a + (x - b)^2 = a + x^2 - 2xb + b^2$$

$$1 = f(2) = a + (2)^2 - 2(2)b + b^2 \Rightarrow a = -b^2 + 4b - 3$$

عند نقطة النهاية الصغرى , المشتقة الاولى للدالة تساوي صفر :

$$f'(x) = 2x - 2b = 0 \Rightarrow f'(2) = 2(2) - 2b = 0 \Rightarrow \therefore b = 2$$

$$\therefore a = -(2)^2 + 4(2) - 3 = 1$$

(8) جد قيمة (a) حتى تكون للدالة : $f(x) = a \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x$ قيمة

متطرفة في النقطة $x = \frac{\pi}{3}$ وهل هي عظمى أم صغرى ؟

الحل : نجد المشتقة الأولى ونجعلها تساوي صفر :

$$f'(x) = a \cos x + \frac{1}{3} \cos 3x(3) = a \cos x + \cos 3x = 0$$

$$a \cos \frac{\pi}{3} + \cos 3 \frac{\pi}{3} = a \cos \frac{\pi}{3} + \cos \pi = 0 \Rightarrow \frac{a}{2} - 1 = 0 \Rightarrow a = 2$$

نختبر النقطة $x = \frac{\pi}{3}$ في المشتقة الثانية بعد تعويض قيمة a :

$$f''(x) = -2 \sin x - 3 \sin 3x = -2 \sin \frac{\pi}{3} - 3 \sin(3) \frac{\pi}{3} = -2 \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} < 0$$

اذن النقطة عند $x = \frac{\pi}{3}$ نهاية عظمى , الان نجد قيمة y من الدالة الاصلية :

$$\left(\frac{\pi}{3}, \sqrt{3} \right) \text{ اذن النقطة } , f\left(\frac{\pi}{3} \right) = 2 \sin \frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} \sin 3 \left(\frac{\pi}{3} \right) = 2 \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 = \sqrt{3}$$

التكامل Integration

•• التكامل الغير محدد ••

التكامل هو عملية معكوسة لعملية التفاضل , بمعنى آخر ايجاد الدالة الاصلية اذا اعطيت مشتقتها , ويعرف كذلك بأنه ايجاد الحل للمعادلة التفاضلية , ويسمى هذا النوع من التكامل بالتكامل غير المحدد Indefinite Integral ويرمز له بالعلامة $\int$. اذن يمكننا القول :

$$\int \text{الدالة الاصلية} = \text{مشتقة الدالة}$$

$$\int f'(x)dx = f(x) + C$$

C : هو ثابت التكامل , الذي بواسطته يمكننا تحديد موقع منحنى الدالة الاصلية على الاحداثيات بالضبط .

ملاحظة: مشتقة الدالة تكون بالنسبة لمتغير ثان , وهو المتغير المستقل عادة :

فمشتقة الدالة y بالنسبة الى x هي : $\frac{dy}{dx}$. اما تفاضل اية دالة او متغير فلا

يحتاج الى متغير ثان لا يجاده , فمثلا : تفاضل y هو dy , وتفاضل y^2 هو $2y dy$.

جدول التكامل الاساسي

$$1. \int dx = x + C$$

$$2. \int a f(x) dx = a \int f(x) dx \quad a \text{ ثابت}$$

$$3. \int a x^n dx = \frac{a x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$$

$$4. \int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$5. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad x \neq 0$$

$$6. \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$$

$$7. \int c^{ax} dx = \frac{c^{ax}}{a \ln c} + C \quad c : \text{ ثابت}$$

$$8. \int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C$$

$$9. \int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + C$$

$$10. \int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a} \tan ax + C$$

11. $\int \frac{dx}{\sin^2 ax} = \frac{-1}{a} \cot ax + C$
12. $\int \tan ax \, dx = \frac{-1}{a} \ln |\cos ax| + C$
13. $\int \cot ax \, dx = \frac{1}{a} \ln |\sin ax| + C$
14. $\int \sec^2 ax \, dx = \frac{1}{a} \tan ax + C$
15. $\int \operatorname{cosec}^2 ax \, dx = \frac{-1}{a} \cot ax + C$
16. $\int \sec ax \, dx = \frac{1}{a} \ln |\sec ax + \tan ax| + C$
17. $\int \operatorname{cosec} ax \, dx = \frac{-1}{a} \ln |\operatorname{cosec} ax + \cot ax| + C$
18. $\int \sin^2 ax \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} + C \quad a = \text{ثابت}$
19. $\int \cos^2 ax \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a} + C \quad a = \text{ثابت}$
20. $\int \sin^n x \cos x \, dx = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1} + C$
21. $\int \cos^n x \sin x \, dx = \frac{-\cos^{n+1} x}{n+1} + C$

تمارين محلولة

1. جد ناتج التكامل :

$$\int \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx = \int \left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right) dx = \frac{x^3}{3} + 2x - \frac{1}{x} + C$$

2. جد ناتج التكامل : $\int \frac{x^2 + 5x - 1}{\sqrt{x}} \cdot dx$

الحل : نقسم كل حد من حدود البسط على المقام فنحصل على :

$$\begin{aligned} \int (x^{\frac{3}{2}} + 5x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}) dx &= \int x^{\frac{3}{2}} \cdot dx + 5 \int x^{\frac{1}{2}} \cdot dx - \int x^{-\frac{1}{2}} \cdot dx \\ &= \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + 5 \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{5} \cdot x^{\frac{5}{2}} + \frac{10}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} - 2 \cdot x^{\frac{1}{2}} + C = \\ &= 2\sqrt{x} \left(\frac{x^2}{5} + \frac{5x}{3} - 1 \right) + C \end{aligned}$$

3. جد ناتج التكامل : $\int \frac{x^2 + 5x + 6}{x+3} \cdot dx$

الحل : نحلل

المقدار في البسط ثم نختصر ثم نكامل :

$$\int \frac{(x+3)(x+2)}{(x+3)} \cdot dx = \int (x+2) dx = \frac{x^2}{2} + 2x + C$$

4. جد ناتج تكامل : $\int x(x^2 - 4)^3 dx$

الحل : نستخدم طريقة التعويض , فنفرض أن المقدار داخل القوس يساوي " u "

ثم نشتق " u " بالنسبة الى x لايجاد $x dx$: $u = x^2 - 4$

$$\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow \therefore \frac{du}{2} = x dx$$

$$\int (x^2 - 4)^3 x dx = \int u^3 \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int u^3 du = \frac{u^4}{8} + C = \frac{(x^2 - 4)^4}{8} + C$$

5. جد ناتج تكامل : $\int \sin(3x - 2) dx$

الحل : نفرض $u = 3x - 2$ إذن : $\frac{du}{3} = dx \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3$

$$\therefore \int \sin(3x-2) dx = \frac{1}{3} \int \sin u du = \frac{1}{3}(-\cos u) + C = -\frac{1}{3} \cos(3x-2) + C$$

6. جد ناتج تكامل : $\int x\sqrt{x-5} dx$

الحل : نفرض $u = x-5 \leftarrow x = u+5 \leftarrow dx = du$

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x-5} dx &= \int (u+5) u^{\frac{1}{2}} du = \int u^{\frac{3}{2}} du + 5 \int u^{\frac{1}{2}} du \\ &= \frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} + \frac{10}{3} u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{5} \sqrt{(x-5)^5} + \frac{10}{3} \sqrt{(x-5)^3} + C \end{aligned}$$

7. جد تكامل المقدار الاتي :

$\int \frac{\ln x}{x} dx$

الحل : نستخدم طريقة التعويض

نفرض أن $u = \ln x$ ثم نشتقها لإيجاد dx ونعوض في التكامل وكما يلي :

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$$

$$\therefore \int \frac{\ln x}{x} dx = \int u du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{1}{2} \ln^2 x + C$$

8. جد ناتج التكامل للمقدار : $\int 5^{x^2} x dx$

الحل : نفرض الـ $u = x^2$

$$du = 2x dx \Rightarrow \frac{du}{2} = x dx$$

$$\int 5^{x^2} x dx = \frac{1}{2} \int 5^u du = \frac{1}{2} \frac{5^u}{\ln 5} + C = \frac{5^{x^2}}{2 \ln 5} + C$$

9. جد ناتج التكامل للمقدار : $\int \tan^2 x dx$

الحل : بما أن $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

$$\therefore \int \tan^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1) dx = \tan x - x + C$$

10. جد ناتج التكامل للمقدار : $\int \sec^2 x e^{\tan x} dx$

الحل : نفرض الـ $u = \tan x \leftarrow du = \sec^2 x dx$

$$\therefore \int \sec^2 x e^{\tan x} dx = \int e^u du = e^u + C = e^{\tan x} + C$$

11. جد ناتج التكامل للمقدار : $\int \cos^2 3x dx$

الحل : من جدول التكامل الاساسي قانون رقم (19) :

$$\int \cos^2 3x dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2(3)x}{4(3)} + C = \frac{x}{2} + \frac{\sin 6x}{12} + C$$

12. جد ناتج التكامل التالي : $\int \sqrt{\cos x} \cdot \sin x \cdot dx$

الحل : نستخدم طريقة التعويض فنفرض أن $u = \cos x$ ثم نشتقها لإيجاد dx ونعوض في التكامل وكما يلي :

$$\begin{aligned} u = \cos x &\rightarrow du = -\sin x dx \\ \therefore \int \sqrt{\cos x} \cdot \sin x \cdot dx &= -\int \sqrt{u} \cdot du = -\int u^{\frac{1}{2}} \cdot du = \\ &= -\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{3} \sqrt{u^3} + C = -\frac{2}{3} \sqrt{\cos^3 x} + C \end{aligned}$$

13. جد ناتج التكامل التالي : $\int \sin^3 x \cdot dx$

الحل : $\sin^3 x = \sin^2 x \cdot \sin x = (1 - \cos^2 x) \cdot \sin x$

$$\int \sin^3 x \cdot dx = \int (1 - \cos^2 x) \cdot \sin x \cdot dx = \int \sin x \cdot dx - \int \cos^2 x \cdot \sin x \cdot dx$$

نستخدم طريقة التعويض فنفرض أن $u = \cos x$ ثم نشتقها لإيجاد dx ونعوض في التكامل وكما يلي :

$$\int \sin x \cdot dx + \int u^2 \cdot du = -\cos x + \frac{u^3}{3} + C = \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C$$

•• حل التكامل بالتجزئة ••

إن هذه الطريقة تعتمد على قانون اشتقاق حاصل ضرب دالتين (u, v) دالة قابلة للاشتقاق وليست إحداها مشتقة الأخرى . فإن :

$$d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du \quad \Rightarrow \quad u \cdot dv = d(u \cdot v) - v \cdot du$$

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du \quad \text{وبتكامل الطرفين نحصل على :}$$

$$\int \text{تفاضل الاولى} \times \text{تكامل الثانية} - \int \text{تكامل الثانية} \times \text{الاولى} = \text{الاولى} \times \text{الثانية}$$

$$\int x \cdot \ln x \cdot dx \quad \text{مثال (1) : جد ناتج التكامل الآتي :}$$

$$\text{الحل : نفرض أن : } u = \ln x \quad , \quad \text{ثم نأخذ تفاضل الطرفين : } du = \frac{dx}{x}$$

$$\text{ونفرض ان : } dv = x dx \quad , \quad \text{ثم نكامل الطرفين : } v = \frac{x^2}{2}$$

$$\begin{aligned} \int \ln x \cdot x dx &= u \cdot v - \int v \cdot du = \text{ثم نعوض في التكامل وكما يلي :} \\ &= \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C = \frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + C \end{aligned}$$

$$\int x \cdot \sin x \cdot dx \quad \text{مثال (2) : جد ناتج التكامل الآتي :}$$

$$\text{الحل : نفرض أن نفرض أن : } u = x \quad \text{ثم نأخذ تفاضل الطرفين } du = dx$$

$$\text{ونفرض ان : } dv = \sin x dx \quad \text{ونكامل الطرفين } v = -\cos x$$

$$\int x \cdot \sin x \cdot dx = \int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du \quad \text{ثم نعوض في التكامل وكما يلي :}$$

$$\begin{aligned} \int x \cdot \sin x \cdot dx &= x \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x) \cdot dx = \\ &= -x \cdot \cos x + \sin x + C = \sin x - x \cdot \cos x + C \end{aligned}$$

$$\int x^3 e^{x^2} dx \quad \text{مثال (3) : جد ناتج التكامل التالي :}$$

$$\text{الحل : نفرض أن نفرض أن : } u = x^2 \quad \text{ثم نأخذ تفاضل الطرفين } du = 2x dx$$

ونفرض ان : $dv = e^{x^2} x dx$ ونكامل الطرفين $v = \frac{1}{2} e^{x^2}$

ثم نعوض في التكامل وكما يلي : $\int x^3 e^{x^2} dx = \int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \int x e^{x^2} dx$$

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

•• تطبيقات على التكامل غير المحدد ••

مثال (1) : جد الدالة التي تساوي مشتقتها .

الحل : من شرط السؤال : $y' = y$ فنحصل على : $\frac{dy}{y} = dx \Rightarrow \frac{dy}{y} = dx$

بتكامل الطرفين نحصل على : $\int \frac{dy}{y} = \int dx \Rightarrow \ln y = x + C$

$$\therefore y = e^{x+C} \Rightarrow y = e^C \cdot e^x$$

ولكن e^C هو مقدار ثابت نفرضه يساوي A :

اذن الدالة التي تساوي مشتقتها هي : $y = A \cdot e^x$

مثال (2) : حل المعادلة التفاضلية التالية : $\frac{dy}{dx} = \cos x - 7$ عند النقطة $(0,3)$

الحل : نعزل y عن x ونكامل الطرفين : $dy = (\cos x - 7) dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos x - 7$

$$\int dy = \int \cos x dx - 7 \int dx \Rightarrow y = \sin x - 7x + C$$

When $x=0, y=3 \Rightarrow 3 = \sin 0 - 7(0) + C \Rightarrow C = 3$

اذن حل المعادلة التفاضلية هو : $y = \sin x - 7x + 3$

مثال (3) : حل المعادلة التفاضلية التالية : $y' = 3x^2 y^2$

الحل: نعزل y عن x ونكامل الطرفين: $\frac{dy}{dx} = 3x^2 y^2 \Rightarrow \frac{dy}{y^2} = 3x^2 dx$

$$\int y^{-2} dy = 3 \int x^2 dx \Rightarrow \frac{-1}{y} = x^3 + C$$

مثال (4): جد معادلة المنحني الذي ميله يساوي $(2x+5)$ واحدى نقاطه $(1,4)$

الحل: ميل المنحني يساوي $\frac{dy}{dx}$:

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (2x+5) \Rightarrow dy = (2x+5)dx$$

نكامل الطرفين: $\int dy = 2 \int x dx + 5 \int dx \Rightarrow y = x^2 + 5x + C$

من النقطة $(1,4)$ نعوض عن $x=1, y=4$: $4 = 1^2 + 5(1) + C \Rightarrow C = -2$

مثال (5): جد معادلة المنحني الذي ميله يساوي $ax^2 - 6x - 9$ وللمنحني نقطة انقلاب هي $(1,-2)$

الحل: ميل المنحني $\frac{dy}{dx} = ax^2 - 6x - 9$ $\therefore \frac{dy}{dx} = ax^2 - 6x - 9$

نكامل الطرفين:

$$dy = ax^2 dx - 6x dx - 9 dx \Rightarrow \int dy = a \int x^2 dx - 6 \int x dx - 9 \int dx$$

$$y = \frac{a}{3} x^3 - 3x^2 - 9x + C$$

نجد قيم كل من a, C كما يلي:

نقطة الانقلاب $(1,-2)$ تحقق معادلة المنحني:

$$-2 = \frac{a}{3} (1)^3 - 3(1)^2 - 9(1) + C \Rightarrow 10 = \frac{a}{3} + C \dots\dots\dots (1)$$

عند نقطة الانقلاب $y'' = 0$:

$$y'' = 2ax - 6 \Rightarrow 0 = 2a(1) - 6 \Rightarrow \therefore a = 3$$

نعوض a في (1) ونجد $C=9$, اذن معادلة المنحني هي:

$$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 9$$

مثال (6): إذا كان : $f'(x) = x(3x - 2)$, حيث : $f(2) = -5$: اوجد $f(x)$
الحل:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = x(3x - 2) \Rightarrow dy = 3x^2 dx - 2x dx$$

$$\int dy = 3 \int x^2 dx - 2 \int x dx \Rightarrow y = x^3 - x^2 + C$$

$$-5 = 2^3 - 2^2 + C \Rightarrow C = -9 \quad \text{اذن : } f(2) = -5$$

$$f(x) = x^3 - x^2 - 9 \quad \text{اذن المنحني هو :}$$

حسابات تغير الفولتية والتيار بدلالة الزمن

ان فرق الجهد (P.d.) Potential differences والذي يرمز له V_R عبر أي مقاومة قيمتها R يساوي :

$$V_R = i R$$

حيث ان i هو التيار والذي يمثل معدل تغير الشحنة q بالنسبة للزمن t :

$$i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow \therefore V_R = R \frac{dq}{dt}$$

فرق الجهد عبر المحث : Voltage across an inductor

ان فرق الجهد عبر المحث V_L في الدائرة الكهربائية يتناسب طرديا مع معدل تغير التيار بالنسبة للزمن , ويسمى ثابت التناسب L معامل الحث الذاتي ويقاس بالهنري Henry ووحدته الهنري H هي : $\frac{\text{volt sec.}}{\text{ampere}}$, $mH = 10^{-3} H$ ملي هنري

$$V_L = L \frac{di}{dt} \Rightarrow \therefore i = \frac{1}{L} \int V_L dt$$

التيار خلال المكثف : Current through a capacitor

بما ان السعة الكهربائية للمكثف C هي نسبة بين مقدار شحنة الموصل q ومقدار جهده الكهربائي V_C (وهي مقدار ثابت) , اذن :

$$C = \frac{q}{V_C} \Rightarrow \therefore q = C V_C$$

ولحساب التيار نشتق الطرفين بالنسبة للزمن t :

$$\frac{dq}{dt} = C \frac{dV_C}{dt} \Rightarrow \therefore i = C \frac{dV_C}{dt} \Rightarrow V_C = \frac{1}{C} \int i dt$$

تقاس سعة المكثف C بوحدة فاراد F وهي : $\frac{\text{coulombs}}{\text{volt}}$

$$\mu F = 10^{-6} F \text{ مايكرو فاراد}$$

مثال (1) : مكثف سعته $5 \mu F$ ، وفرق الجهد عبر دائرته $V = 200 \cos 10000 t$ احسب تيار الدائرة .

$$\text{الحل : } i = C \frac{dV}{dt} = 5 \times 10^{-6} [200(-\sin 10000 t)10000]$$

$$i = -10 \sin 10000 t \text{ ampere}$$

مثال (2) : ملف نقى معامل حثته $L = 0.02 H$ ، يؤثر عليه جهد دائرة مقداره $V = 150 \sin 1000 t$ احسب تيار الدائرة .

$$\text{الحل : } i = \frac{1}{L} \int V_L dt = \frac{1}{0.02} \int 150 \sin 1000 t dt$$

$$i = \frac{150}{0.02} \left(\frac{-\cos 1000 t}{1000} \right) + c = -7.5 \cos 1000 t + c \text{ ampere}$$

مثال (3) : ملف معامل حثته $L = 12 H$ ، ومقاومة سلكه $R = 10 \Omega$ ، التيار خلال الملف هو : $i = 3[1 - e^{-2t}]$ ، جد فرق الجهد عبر الملف .

$$\text{الحل : } V_R = i R = 10(3[1 - e^{-2t}]) = 30[1 - e^{-2t}] \text{ volt}$$

$$V_L = L \frac{di}{dt} = 12[-3e^{-2t}(-2)] = 72e^{-2t} \text{ volt}$$

$$V = V_R + V_L = 30[1 - e^{-2t}] + 72e^{-2t} = 30 + 42e^{-2t} \text{ volt}$$

مثال (4) : مكثف سعته $0.1 F$ ، والتيار خلاله $i = 50 \cos \pi t$ جد (P.d.) .
الحل :

$$V_C = \frac{1}{C} \int i dt = \frac{1}{0.1} \int 50 \cos \pi t dt = \frac{500}{\pi} \sin \pi t + c \text{ volt}$$

مثال (5) : ملف نقى له محاثته مقدارها $L = 15 H$ ، فإذا كان تيار الدائرة هو :
 $i = 5 \cos(t + 1) \quad t \geq 0$ ، جد الزمن الاول الذي تكون عنده فولتية
الدائرة تساوي $V = 75 \text{ volt}$.
الحل :

$$V_L = L \frac{di}{dt} = 15 [5(-\sin(t + 1))] = -75 \sin(t + 1) = 75$$

$$\therefore \sin(t + 1) = -1 \quad \text{let } t + 1 = Z$$

$$\sin Z = -1 \quad \Rightarrow \therefore Z = 270 \quad Z = t + 1, \quad Z \geq 1$$

$$Z = \frac{3\pi}{2} = \frac{3(3.14)}{2} = 4.71$$

$$\therefore t = Z - 1 = 4.71 - 1 = 3.71 \text{ sec} .$$

تمارين للتدريب

(1) مكثف سعته 10^{-2} فاراد وتيار الدائرة يعبر عنه : $i = 10 - e^{-t}$ جد فرق
الجهد عبر طرفي المكثف . (ج : $100(10t + e^{-t})$)

(2) جد فولتية دائرة ملف معامل حثه يساوي $L = 20 H$ ومقاومة سلكه 2Ω اذا
كان تيار الدائرة هو : $i = 5 \cos \omega t$.
(ج : $10 \cos \omega t - (100\omega) \sin \omega t$)

(3) ملف نقى له محاثته قيمتها L هنري وتيار دائرته يعبر عنه $i = 10 \sin 200\pi t$
جد فولتية الدائرة . (ج : $2000\pi L \cos 200\pi t$)

(4) ملف مقاومة سلكه 50Ω ومعامل حثه $L = 20 H$ ربطت معه على التوالي
مقاومة قيمتها 150Ω ، فإذا كان تيار الدائرة هو : $i = 4[1 - e^{-t} \sin t]$
جد : (أ) فرق الجهد عبر كل من المقاومة والملف
(ب) فرق الجهد الكلي للدائرة V_T عند الزمن $t = \pi$ ثانية

$$(\text{ ج : } V_T = 800 + \frac{80}{e^\pi})$$

(5) اذا كان تيار الدائرة الكهربائية لملف (مقاومة سلكه 5Ω ومعامل حثه $5 H$) يعبر
عنه بالمقدار : $i = 2 - 2e^{-t}$ جد :
(أ) فرق الجهد P.d. عبر الملف
(ج : 10 فولت)

ب) إذا ربطت مقاومة على التوالي مع الملف مقدارها 10Ω جد فرق الجهد للدائرة عند الزمن $t = 2$ ثانية .
 ج) : $30 - \frac{20}{e^2}$ فولت (

السرعة والتعجيل

إذا فرضنا السرعة v والمسافة s والتعجيل a والزمن t فانه :
 عندما نشق المسافة بالنسبة للزمن نحصل على السرعة v : $v = \frac{ds}{dt}$
 وعندما نشق السرعة بالنسبة للزمن نحصل على التعجيل a : $a = \frac{dv}{dt}$
مثال (1): إذا كان : $s = t^3 + 1$ حيث ان s هي المسافة المقطوعة في الزمن t جد السرعة v والتعجيل a .
الحل :

$$a = \frac{dv}{dt} = 6t \quad \text{التعجيل يساوي} \quad , \quad v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 \quad \text{السرعة تساوي}$$

وبالعكس فان تكامل التعجيل يساوي السرعة :

$$v = \int a dt = \int 6t dt = 6 \frac{t^2}{2} + C = 3t^2 + C$$

وتكامل السرعة يساوي المسافة (الازاحة) :

$$s = \int v dt = \int 3t^2 dt = 3 \frac{t^3}{3} + C = t^3 + C$$

مثال (2): جسم يتحرك بخط مستقيم من السكون وكانت سرعته تساوي : $v = 3t^2 + 2 \text{ m/sec}$ جد ازاحته في أية لحظة , ثم جد ازاحته بعد 2 ثانية.
الحل:

$$v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 + 2 \quad \Rightarrow \quad ds = 3t^2 dt + 2dt$$

$$\int ds = 3 \int t^2 dt + 2 \int dt \quad \Rightarrow \quad s = t^3 + 2t + C$$

نكامل الطرفين : $s = t^3 + 2t + C$ $t=0$ فان $s=0$:
 الجسم يتحرك من السكون , اذن عندما $t=0$ فان $s=0$:

$$0 = (0)^3 + 2(0) + C \quad \Rightarrow \quad C = 0$$

اذن الازاحة في أية لحظة هي : $s = t^3 + 2t$

$$s = (2)^3 + 2(2) = 12 \text{ m} \quad \text{الازاحة بعد 2 ثانية , اي عندما } t=2$$

مثال (3): جسم يتحرك بتعجيل قدره 5 m/sec^2 فإذا علمت انه بعد 6 ثواني يكون قد قطع 180 m وسرعته في تلك اللحظة تساوي 45 m/sec ماهي ازاحته في أية لحظة.

الحل : التعجيل = 5 من السؤال : $dv = 5 dt \Rightarrow a = \frac{dv}{dt} = 5$

$$\int dv = \int 5 dt \Rightarrow v = 5t + C$$

السرعة بعد 6 ثواني هي 45 m/sec : $45 = 5(6) + C \Rightarrow C = 15$
 إذن السرعة في أية لحظة هي : $v = 5t + 15$

$$v = \frac{ds}{dt} = 5t + 15 \Rightarrow ds = 5t dt + 15 dt$$

$$s = \frac{5}{2} t^2 + 15t + C$$

نكامل الطرفين :

بعد 6 ثواني الجسم يقطع 180 m : $180 = \frac{5}{2}(6)^2 + 15(6) + C \Rightarrow C = 0$

إذن الازاحة في أية لحظة هي : $s = \frac{5}{2} t^2 + 15t$

مثال (4): اطلقت رصاصة الى الاعلى شاقوليا بسرعة ابتدائية قدرها 1280 ft/sec جد ارتفاعها بعد t ثانية .
الحل :

التعجيل الارضي بفعل الجاذبية (في حالة سقوط الجسم) = 32 ft/sec^2 وهو ثابت لا يتغير

اما التعجيل ضد الجاذبية الارضية = -32 ft/sec^2

$$v = \int a dt = \int (-32) dt = -32t + C$$

عندما $t=0$, $v = 1280 \text{ ft/sec}$: $1280 = -32(0) + C \Rightarrow C = 1280$
 إذن السرعة الانية هي : $v = 1280 - 32t$

$$s = \int v dt = \int 1280 dt - \int 32t dt = 1280t - 16t^2 + C$$

عندما $t=0$, $s=0$: $C = 0$

المسافة المقطوعة في أية لحظة : $s = 1280t - 16t^2$

*** التكامل المحدد ***

DEFINITE INTEGRATION

الدالة $f(x)$ موجبة ومستمرة خلال الفترة $[a, b]$ أي ان قيمة x هي : $a \leq x \leq b$ ، يعرف التكامل المحدد بالقانون التالي :

$$\int_a^b f'(x) \cdot dx = f(x) \Big|_a^b = f(b) - f(a)$$

ونطبق ذات قواعد التكامل غير المحدد غير اننا لا نضيف ثابت التكامل C وانما نعوض الحد

$$\int_{-1}^2 \frac{3x dx}{1+2x^2}$$

الاعلى للتكامل (b) في النتيجة ونطرح منه قيمة التعويض في الحد الادنى للتكامل (a) .
مثال (1) : احسب ناتج التكامل الاتي :

الحل : نفرض أن $u = 1 + 2x^2$ ثم نشتقها لإيجاد xdx ونعوض في التكامل :

$$u = 1 + 2x^2 \rightarrow du = 4x dx \rightarrow \frac{du}{4} = x dx$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 \frac{3x dx}{1+2x^2} &= \frac{3}{4} \int_{-1}^2 \frac{du}{u} = \frac{3}{4} \ln u \Big|_{-1}^2 = \frac{3}{4} \ln(1+2x^2) \Big|_{-1}^2 = \\ &= \frac{3}{4} (\ln 9 - \ln 3) = \frac{3}{4} (\ln 3^2 - \ln 3) = \frac{3}{4} (2 \ln 3 - \ln 3) = \frac{3}{4} \ln 3 \end{aligned}$$

$$\int_0^1 x^2 e^x \cdot dx$$

مثال (2) : احسب ناتج التكامل الاتي :

نستخدم قانون تجزئة التكامل : $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$ فنفرض أن

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx$$

$$\int x^2 \cdot e^x \cdot dx = x^2 e^x - 2 \int x \cdot e^x \cdot dx$$

$$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$$

التجزئة مره اخرى للتكامل الاخير :

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$$

$$\int x \cdot e^x \cdot dx = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x$$

$$\int_0^1 x^2 e^x \cdot dx = \left[x^2 \cdot e^x - 2(x \cdot e^x - e^x) \right]_0^1 =$$

$$= (1 \cdot e - 2 \cdot e + 2 \cdot e) - (0 - 0 + 2) = e - 2$$

مثال (3) : إحسب ناتج التكامل الآتي :

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \sin 2x \cdot dx$$

الحل :

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \sin 2x \cdot dx = \left. -\frac{1}{2} \cos 2x \right|_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\cos 2\pi - \cos 2 \frac{\pi}{2} \right] = -\frac{1}{2} [1 - (-1)] = -1$$

مثال (4) : إحسب ناتج التكامل الآتي :

الحل : نستخدم طريقة التعويض فنفرض أن : $x - 1 = z \leftarrow x = z + 1$ ثم نشتقها لإيجاد dx ونعوض في التكامل , وكما يلي :

$$\int_2^3 \frac{x^2 + x - 5}{x - 1} dx = \int_2^3 \frac{(z + 1)^2 + z + 1 - 5}{z} dz =$$

$$= \int_2^3 \frac{z^2 + 3z - 3}{z} dz = \int_2^3 z dz + 3 \int_2^3 \frac{dz}{z} - 3 \int_2^3 \frac{dz}{z} =$$

$$= \left. \frac{z^2}{2} \right|_2^3 + 3 \left. \ln z \right|_2^3 - 3 \left. \ln z \right|_2^3 = \left. \frac{(x-1)^2}{2} \right|_2^3 + 3(x-1) \Big|_2^3 - 3 \ln(x-1) \Big|_2^3 =$$

$$= 2 - \frac{1}{2} + 6 - 3 - 3 \ln 2 = \frac{9}{2} - 3 \ln 2$$

مثال (5) : جد ناتج التكامل التالي :

$$\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{4\pi}{3}} \frac{du}{-3\pi \cos^2 \frac{x}{3}}$$

$$\text{الحل: نفرض قيمة الزاوية : } \frac{x}{3} = u \quad \Leftarrow \quad dx = 3du$$

$$\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{3}} = 3 \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{du}{\cos^2 u}$$

$$= 3 \left[\tan \frac{x}{3} \right]_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = 3 \left[\tan \frac{\pi}{4} - \tan \frac{-\pi}{4} \right] = 3[1 - (-1)] = 6$$

إيجاد طول قوس المنحني (L)

عندما تكون الدالة $y = f(x)$ مستمرة وهي لمتغير واحد , فان طول قوس المنحني بين

$$\text{النقطتين } A(a,c) , B(b,d) \text{ يساوي: } L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx$$

وفي تطبيقات كثيرة يكون المنحني مسار لنقطة متحركة احداثياتها (x, y) وهما دالتان لمتغير آخر مثل الزمن t حيث ان : $x = f(t)$, $y = g(t)$ ولايجاد طول قوس المنحني عند تغير t من t_a الى t_b :

$$L = \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} dt$$

$$L = \int \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \quad \text{ويمكن كتابة المعادلة بالشكل التالي :}$$

مثال (1) : جد طول قوس المنحني للدالة $y = x^{\frac{3}{2}}$ للفترة من النقطة $(0,0)$ الى النقطة $(4,8)$.

الحل : $y = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} L &= \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx \\ L &= \frac{4}{9} \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} \left(\frac{9}{4}\right) dx = \frac{4}{9} \left[\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{3}\right) \right]_0^4 \\ L &= \frac{8}{27} \left\{ \left[1 + \frac{9}{4}(4)\right]^{\frac{3}{2}} - \left[1 + \frac{9}{4}(0)\right]^{\frac{3}{2}} \right\} = 9.07 \end{aligned}$$

وحدة طول

مثال (2). جد المسافة المقطوعة للنقطة $P(x, y)$ من $t = 0$ الى $t = 3$ اذا كان مكان النقطة عند الزمن t كما معطى في المعادلتين :

الحل : $x = \frac{(2t+3)^{\frac{3}{2}}}{2}$, $y = \frac{t^2}{2} + t$
نشتق كل من x , y بالنسبة الى t :

$$dx = \frac{3}{2} (2t+3)^{\frac{1}{2}} (2) dt = (2t+3)^{\frac{1}{2}} dt \quad , \quad dy = (t+1) dt$$

$$L = \int_0^3 \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_0^3 \sqrt{(t+1)^2 + (2t+3)} dt = \int_0^3 (t+2) dt = 10.5$$

مثال (3). جد طول قوس المنحني للدالة $y = \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}$ على الفترة $[1, 4]$.

الحل : نشتق y بالنسبة الى x :

$$\frac{dy}{dx} = (x-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + (x-1)} dx = \int_1^4 \sqrt{x} dx = \frac{2}{2} \left[x^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 = \frac{14}{2} \text{ (و.ط)}$$

مثال (4). جد طول قوس منحنى الدالة $y = \frac{1}{2}(x^2 + 2)^{\frac{3}{2}}$ للفترة $[0, 3]$.

الحل : نجد المشتقة $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} (x^2 + 2)^{\frac{1}{2}} (2x)$$

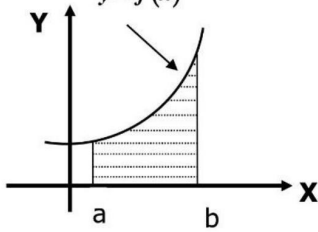
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = x^4 + 2x^2$$

$$L = \int_0^3 \sqrt{1 + x^4 + 2x^2} dx = \int_0^3 \sqrt{(x^2 + 1)^2} dx = \int_0^3 (x^2 + 1) dx$$

$$L = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_0^3 = 9 + 3 = 12 \text{ (و.ط)}$$

المساحة تحت المنحني

لتكن $y = f(x)$ دالة مستمرة في الفترة $[a, b]$ فالمساحة المحددة بمنحني الدالة والمحور x وكل من المستقيمين $x = a$, $x = b$ تساوي :



$$A = \int_a^b f'(x) dx = f(x) \Big|_a^b = f(b) - f(a)$$

$$A = \int_{x=a}^{x=b} y dx$$

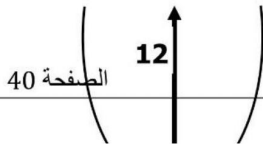
قانون المساحة بين المنحني والمحور x :

$$A = \int_{y=c}^{y=d} x dy$$

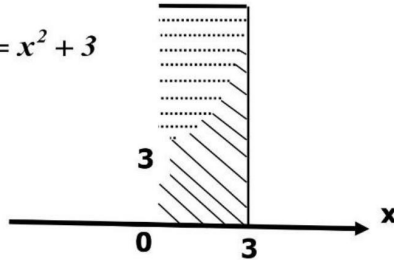
قانون المساحة بين المنحني والمحور y :

مثال (1) . جد المساحة المحددة بمنحني الدالة : $y = f(x) = x^2 + 3$ والمحور x وكل من $x = 0$, $x = 3$ ثم اوجد المساحة بين المنحني والمحور y .

الحل : المساحة بين المنحني والمحور x :



$$y = x^2 + 3$$



$$A = \int_a^b y dx = \int_0^3 (x^2 + 3) dx$$

$$= \left[\left(\frac{27}{3} + 9 \right) - 0 \right] = 18 = \left[\frac{x^3}{3} + 3x \right]_0^3 \quad (\text{و.م})$$

لايجاد المساحة بين المنحني والمحور y ،
نكتب x بدلالة y كما يلي :

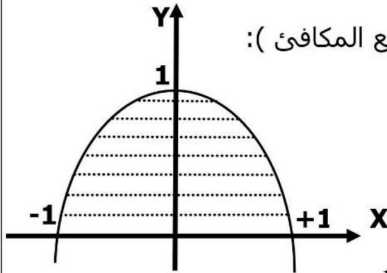
$$y = x^2 + 3 \Rightarrow x^2 = y - 3 \Rightarrow x = \sqrt{y - 3}$$

حدود التكامل : عندما $y=3$, $x=0$, وعندما $y=12$, $x=3$

$$A = \int_c^d x dy = \int_3^{12} \sqrt{y - 3} dy = \left[\frac{(y - 3)^{3/2}}{3/2} \right]_3^{12} = \frac{2}{3} \left[(12 - 3)^{3/2} - (3 - 3)^{3/2} \right] = 18$$

وحدة مربعة

مثال (2) : جد المساحة المحصورة بين المنحني (القطع المكافئ) :



$$y = 1 - x^2$$

والمحور x .

الحل : نجد أولا نقاط تقاطع المنحني

مع المحور x لنعتبرها حدوداً للتكامل :

$$y = 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

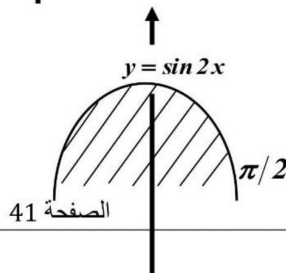
$$A = \int_{-1}^{+1} (1 - x^2) dx = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{+1} = \left[1 - \frac{1}{3} \right] - \left[-1 - \frac{-1}{3} \right] = \frac{4}{3} \quad (\text{و.م})$$

مثال (3) : جد المساحة المحصورة بين المحور x وقوس واحد لمنحني الدالة

$$y = \sin 2x$$

الحل : نجد نقاط التقاطع مع المحور x : $\therefore 2x = \pi$ $\Rightarrow 0 = \sin 2x$

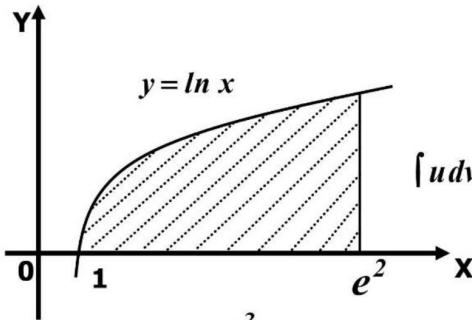
حدود التكامل : $\therefore x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$



$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = \frac{1}{2} [-\cos 2x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$A = \frac{-1}{2} [\cos \pi - \cos 0] = \frac{-1}{2} [-1 - 1] = 1 \quad (\text{و.م})$$

مثال (4): احسب المساحة تحت منحنى الدالة اللوغاريتمية $y = \ln x$ والمحور x ، من النقطة $x = 1$ الى النقطة $x = e^2$.



$$A = \int_1^{e^2} \ln x \, dx$$

الحل :

نستخدم قانون تجزئة التكامل $\int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du$

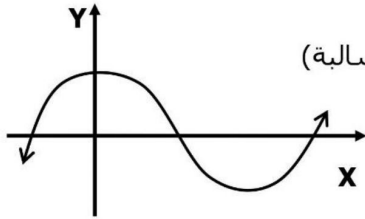
$$du = \frac{dx}{x} \quad \Leftarrow \quad u = \ln x$$

فنفرض ان :

$$v = x \quad \Leftarrow \quad dv = dx$$

$$A = \int_1^{e^2} \ln x \, dx = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - x \Big|_1^{e^2}$$

$$A = [e^2 \cdot \ln e^2 - e^2] - [1 \cdot \ln 1 - 1] = [2e^2 - e^2] - [0 - 1] = e^2 + 1 \quad (\text{و.م})$$

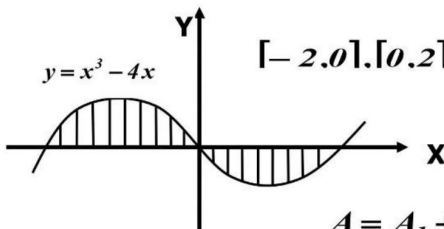


قد تنجز المساحة بين المنحنى والمحور x الى جزئين ، جزء فوق المحور x (y موجبة) وجزء تحت المحور x (y سالبة) وعليه نأخذ القيمة المطلقة للتكامل كما يلي :

$$A = A_1 + A_2 = \int_a^b |y| \, dx + \int_b^c |y| \, dx$$

مثال (5): احسب المساحة المحددة بين منحنى الدالة $y = x^3 - 4x$ والمحور x .

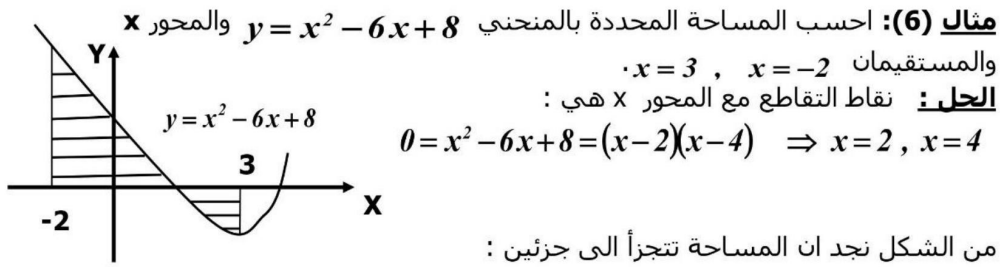
الحل : نجد نقاط التقاطع مع المحور x : $0 = x^3 - 4x = x(x^2 - 4)$
 $x = 0$, $x = +2$, $x = -2$: حدود التكامل :



من الشكل نلاحظ ان المساحة تنجزاً بين الفترتين $[-2, 0]$, $[0, 2]$

$$A = A_1 + A_2 = \int_{-2}^0 (x^3 - 4x) \, dx + \int_0^2 (x^3 - 4x) \, dx$$

$$A = \left| \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_{-2}^0 \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_0^2 \right| = |4| + |-4| = 8 \quad (\text{و.م})$$



$$A = A_1 + A_2 = \int_{-2}^2 (x^2 - 6x + 8) dx + \int_2^3 (x^2 - 6x + 8) dx$$

$$A = \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x \right]_{-2}^2 - \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x \right]_2^3 = \frac{88}{3} + \frac{17}{3} = 35 \quad (\text{و.م})$$

مثال (7): احسب المساحة المحددة بالمنحني $v = x^3 + 2x^2 - 3x$ والمحور x

الحل:

$$v = x(x^2 + 2x - 3) = x(x-1)(x+3) = 0$$

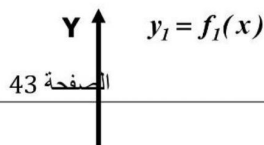
$$\therefore x = 0, x = 1, x = -3$$

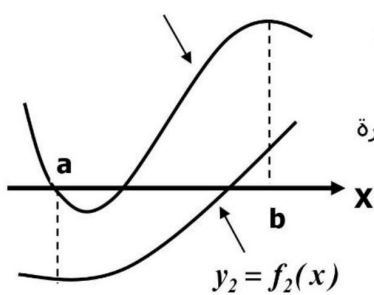
$$A = \int_{-3}^0 (x^3 + 2x^2 - 3x) dx + \int_0^1 (x^3 + 2x^2 - 3x) dx$$

$$A = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_{-3}^0 + \left[\frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_0^1$$

$$A = \frac{81-72-54}{4} + \frac{3+8-18}{6} = \frac{-142}{4} = \left| \frac{71}{2} \right| \quad \text{وحدة مربعة}$$

المساحة بين منحنين



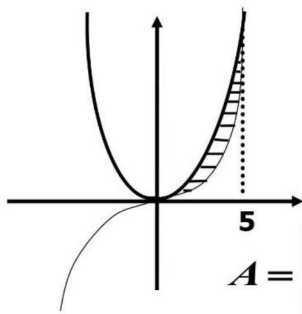


لتكن $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$ دالتان مستمرتان في الفترة $[a, b]$, ولنفرض ان المنحني y_1 هو اعلى من المنحني y_2 من a الى b فان المساحة المحصورة بين المنحنيين كما في الشكل المجاور هي :

$$A = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx$$

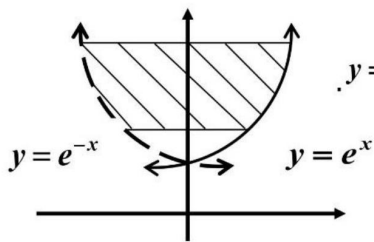
مثال (1) : احسب المساحة المحددة بالمنحنيين $y = x^3$, $y = 5x^2$

الحل : نجد اولاً نقاط التقاطع بين المنحنيين : $x^3 = 5x^2 \Rightarrow x^3 - 5x^2 = 0$
 $x^2(x-5) = 0 \Rightarrow x = 0$, $x = 5$



$$A = \int_0^5 (x^3 - 5x^2) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} \right]_0^5$$

$$A = \left[\frac{5^4}{4} - \frac{5(5)^3}{3} \right] - [0] = \left| -\frac{625}{12} \right| = \frac{625}{12} \text{ (و.م)}$$



مثال (2) : احسب المساحة المحصورة بين الدالتين :

$y_1 = e^x$ و $y_2 = e^{-x}$ والمستقيمين $y = 2$, $y = 4$

الحل : بما ان المطلوب المساحة بين المنحنيين والمحور y , نكتب الدالتين x بدلالة y :

(نحول الدالتين من الصيغة الاسية الى اللوغاريتمية) كما يلي :

$$y_1 = e^x \Rightarrow x = \ln y \quad , \quad y_2 = e^{-x} \Rightarrow x = -\ln y$$

نحسب المساحة للفترة $[2, 4]$:

$$A = \int_2^4 [\ln y - (-\ln y)] dy = 2 \int_2^4 \ln y dy$$

نستخدم قانون تجزئة التكامل : $\int u dv = u.v - \int v du$

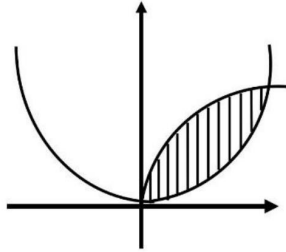
نفرض ان : $v = y \Leftrightarrow dv = dy$ $du = \frac{dy}{y} \Leftrightarrow u = \ln y$

$$A = 2 \int_2^4 \ln y dy = 2 \left[y \ln y - \int_2^4 y \frac{dy}{y} \right] = 2 \left[y \ln y - \int_2^4 dy \right] = 2 [y \ln y - y]_2^4$$

$$A = 2[(4 \ln 4 - 4) - (2 \ln 2 - 2)] = 12 \ln 2 - 4 \quad (\text{و.م})$$

مثال (3): إحسب المساحة المحصورة بين الدالتين : $y_2 = 4\sqrt{x}$ و $y_1 = \frac{x^2}{2}$

الحل : نحدد نقاط التقاطع بين المنحنيين :



$$4\sqrt{x} = \frac{x^2}{2} \Rightarrow 8\sqrt{x} = x^2$$

$$x^4 - 64x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 4$$

نربع الطرفين :

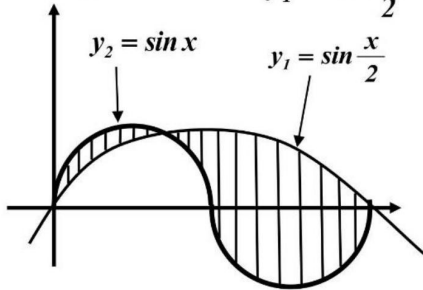
$$A = \int_0^4 \left(4\sqrt{x} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left[4 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{2 \times 3} \right]_0^4 = \left[\frac{8}{3} (4)^{\frac{3}{2}} - \frac{64}{6} \right] - 0 = \frac{64}{6}$$

(و.م)

مثال (4): جد المساحة المحصورة بين المنحنيين $y_2 = \sin x$ ، $y_1 = \sin \frac{x}{2}$ ضمن

الفترة $[0, 2\pi]$.

الحل:



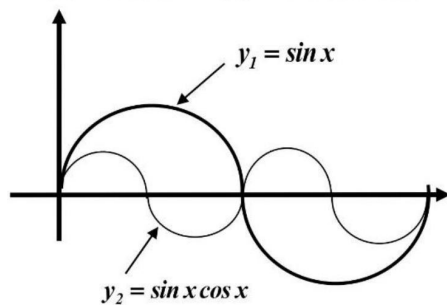
$$A = \int_0^{2\pi} \left(\sin x - \sin \frac{x}{2} \right) dx$$

$$A = \left[-\cos x - \left(-2 \cos \frac{x}{2} \right) \right]_0^{2\pi}$$

$$A = [(-\cos 2\pi + 2 \cos \pi) - (-\cos 0 + 2 \cos 0)]$$

$$A = [(-1 + 2(-1)) - (-1 + 2)] = |-4| = 4 \quad (\text{م.و})$$

مثال (5): جد المساحة المحصورة بين المنحنيين $y_1 = \sin x$ ، $y_2 = \sin x \cos x$ ضمن



الفترة $[0, 2\pi]$.

الحل : نجد نقاط التقاطع بين المنحنيين :

$$\sin x = \sin x \cos x$$

$$\sin x - \sin x \cos x = 0$$

$$\sin x (1 - \cos x) = 0$$

$$\sin x = 0, \quad \cos x = 1$$

$$\therefore x = 0, \quad x = \pi, \quad x = 2\pi$$

$$A = \int_0^{\pi} (\sin x - \sin x \cos x) dx + \int_{\pi}^{2\pi} (\sin x \cos x - \sin x) dx$$

$$A = [-\cos x]_0^{\pi} - \frac{1}{2} [\sin^2 x]_0^{\pi} + \frac{1}{2} [\sin^2 x]_{\pi}^{2\pi} - [-\cos x]_{\pi}^{2\pi} = 4 \quad (\text{م.و})$$

رابعاً : الاختبار البعدي

ضع دائرة حول الاجابة الصحيحة لكل مما ياتي :

١ - جد كل الاعداد المركبة التي تحقق المعادلة $Z^2 = j4$ مع التمثيل بالرسم.

(c) $-\sqrt{2} (1 + j)$

(d) $(1 + j)$

(e) $(-1 + j)$

٢ - جد الجدور الثلاثة للعدد المركب $Z = -1 + j$ مع التمثيل بالرسم

(a) $Z_1 = \cos(-16) + j \sin(-15)$, $Z_2 = \cos(-44)$, $Z_3 = \cos(225)$

(b) $Z_1 = 2^{1/6} \cos(-15) + j \sin(-15)$, $Z_2 = 2^{1/6} \cos(105) + j \sin(-15)$,

$Z_3 = 2^{1/6} \cos(225) + j \sin(225)$

مفاتيح الاجابة على الاختبارات

الاختبار البعدي		الاختبار القبلي	
الاجابة الصحيحة	رقم السؤال	الاجابة الصحيحة	رقم السؤال
A	١	A	١
B	٢	B	٢
		A	٣

المصادر الاساسية :

Monaghan, J., Ely, R., Pinto, M. M., & Thomas, M. (2023). *The learning and teaching of Calculus: ideas, insights and activities*. Taylor & Francis.

[20191008_080722_640.pdf \(uoninevah.edu.iq\)](https://uoninevah.edu.iq/20191008_080722_640.pdf)

خارطة القياس المعتمدة

عدد الفقرات	الأهداف السلوكية					الأهمية النسبية	عناوين الفصول	المحتوى التعليمي
	التقييم	التحليل	التطبيق	الفهم	المعرفة			
٥	٢٠ %	١٠ %	١٠ %	٢٥ %	٣٥ %	١٠٠ %	التفاضل والتكامل	الفصل الثاني