



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
الجامعة التقنية الشمالية
معهد التقني الدور



الحقية التعليمية

القسم العلمي: تقنيات الاجهزة الطبية

اسم المقرر: اسس
الرياضيات

المرحلة / المستوى:
الاول

الفصل الدراسي: الاول

السنة

الدراسية: ٢٠٢٤/٢٠٢٥





معلومات عامة

اسم المقرر:	اسس الرياضيات
القسم:	تقنيات الاجهزة الطبية
الكلية:	معهد تقني الدور
المرحلة / المستوى	الاول
الفصل الدراسي:	الاول
عدد الساعات الاسبوعية:	نظري ٣ عملي
عدد الوحدات الدراسية:	٣
الرمز:	TIDO100
نوع المادة	نظري عملي كلهما
هل يتوفر نظير للمقرر في الاقسام الاخرى	كلا
اسم المقرر النظير	-
القسم	-
رمز المقرر النظير	-
معلومات تدريسي المادة	
اسم مدرس (مدرسي) المقرر:	فلاح محمد عبد
اللقب العلمي:	مدرس
سنة الحصول على اللقب	-
الشهادة :	دكتوراة
سنة الحصول على الشهادة	
عدد سنوات الخبرة (تدريس)	

الوصف العام للمقرر

تعريف الطالب على استخدام الرياضيات في المواضيع العلمية الأخرى و زيادة قدرته على التفكير المنطقي عند حل التمارين وكذلك زيادة قدرته على التطوير وكيفية ربط المعطيات مع معلوماته للحصول على حل المسألة.

موضوعات المقرر:

- تعريف الطالب بالمقرر ومفرداته .
- المصفوفات – المحددات – تطبيقات كهربائية .
- قوانين ايجاد المتطابقات المثلثية والمعادلات المثلثية.
- الأسس واللوغاريتيمات وقوانينها .
- الأعداد المركبة – التمثيل الهندسي للعدد المركب- علاقة الوحدات الكهربائية بالإعداد المركبة ، ايجاد جذور الإعداد المركبة .
- التفاضل –جبر المشتقات – الدوال المتعددة الحدود ومشتقاتها-قاعدة السلسلة- الدالة المركبة-الدالة البارامترية.
- معادلة المماس والعمود – السرعة والتعجيل – حسابات تغير الفولتية والتيار بدلالة الزمن .
- الغايات – غاية الدوال الجبرية والمثلثية – تطبيقات على الغايات .

الأهداف العامة

- العمل على مواكبة العصر، وتفسير تطورات العصر من الناحية العلمية ومن الناحية التكنولوجية كذلك، لأنها تعد لغة العصر، وأسلوباً علمياً يستطيع عبره البشر التواصل فيما بينهم.
- العمل على استعمال المبادئ التي من دورها تفسير واقع الرياضيات، وإدماج فروع ومجالاته مع بعضها لفهم الرياضيات وباقي العلوم الأخرى باختلاف أنواعها.
- العمل على تشجيع وتحفيز التفكير بشكل منطقي المبني على الاستنتاجات والبراهين.
- العمل على ربط الرياضيات بمجالات العلوم الأخرى، كالأحياء، والفيزياء، والطب، والكيمياء، والاقتصاد، والزراعة، والصناعة، وغيرها من المجالات الأخرى.
- التنويه إلى دور الرياضيات الكبير في تقدم علم الحاسب الآلي والتكنولوجيا، حيث ساعد الرياضيات في ضبط وبرمجة الحاسوب وبرامجه (نظام العد الثنائي).

الأهداف الخاصة

- اكساب المتعلم مهارات اسس الرياضيات وقوانينها
- إلمام المتعلم بالمصفوفات والمشتقات واللوغاريتمات
- التركيز على حل الامثلة الخاصة باسس الرياضيات وفي نهاية كل محاضرة يوجد نشاط ومهمة

الأهداف السلوكية او نواتج التعلم

بعد الانتهاء من الدرس (المحاضرة) سيكون الطالب قادرا على ان:

- استخدام الرياضيات في المواضيع العلمية الاخرى
- زيادة قدرته على التفكير المنطقي عند حل التمارين
- يميز بين المشتقات والمصفوفات واللوغاريتمات
- كيفية ربط المعطيات مع معلوماته للحصول على حل المسألة

المتطلبات السابقة

كتاب الرياضيات **Thomas Calculus**

الاهداف السلوكية او مخرجات التعليم الأساسية		
ت	تفصيل الهدف السلوكي او مخرج التعليم	آلية التقييم
1	معرفة الطالب باسس الرياضيات الاساسية	• المحاضرات • الواجبات • والمشاركة • حلقات النقاش • والاختبارات
2	اكتساب الطالب القدرة على حل مسائل المصفوفات واللوغاريتمات والمشتقات	البحث وتطوير المهارة من خلال الابحاث وكتب ومصادر الرياضيات
3	القدرة على تطبيق المصفوفات واللوغاريتمات والمشتقات في المواضيع العلمية	• مشاريع فردية • الاختبارات
4	معرفة الطالب التفاضل، جبر المشتقات ، الدوال المتعددة الحدود ومشتقاتها، قاعدة السلسلة، الدالة المركبة، الدالة البارامترية. وحل الامثلة عليها	• حل التمارين • الانشطة



أساليب التدريس (حدد مجموعة متنوعة من أساليب التدريس لتناسب احتياجات الطلاب ومحتوى المقرر)

الاسلوب او الطريقة	مبررات الاختيار
١- المحاضرات النظرية من خلال الشرح	محدد وواضح ويطبق بسهولة وهو التقليدي
٢. التعلم التفاعلي والمتبادل	التفاعل بين الطلبة
٣. التعلم القائم على حل المسائل الرياضية حتى لو كان بدون مراجعة سابقة للمادة	اكتساب الطالب مهارة حل المسائل من خلال تعلم اسس ومبادئ الرياضيات
٤. المناقشة في نهاية المحاضرة	تقديم الخلاصة والفهم للموضوع

الفصل الاول من المحتوى العلمي						
			الوقت		عنوان الفصل	
طرق القياس	التقنيات	طريقة التدريس	العنوان الفرعي	العملي	النظري	التوزيع الزمني
عرض الامثلة والمناقشة وملاحظة مستوى الطلبة	عرض تقديمي، شرح، أسئلة وأجوبة، مناقشة	محاضرة نظري	مقدمة عن المقرر، أهداف التعلم، محتوى المقرر	-	٢	الأسبوع الأول
			العناوين الفرعية			
عرض الامثلة والمناقشة وملاحظة مستوى الطلبة	(شرح أسئلة وأجوبة/ مناقشة)	محاضرة نظري	المصفوفات	-	٢	الأسبوع الثاني
			المحددات			
			تطبيقات كهربائية			
عرض الامثلة والمناقشة وملاحظة مستوى الطلبة	(شرح أسئلة وأجوبة/ مناقشة)	محاضرة نظري	المتطابقات المثلثية	-	٢	الاسبوع الثالث
			المعادلات المثلثية			
عرض الامثلة والمناقشة وملاحظة مستوى الطلبة	(شرح أسئلة وأجوبة/ مناقشة)	محاضرة نظري	الأسس واللوغاريتمات	-	٢	الاسبوع الرابع
			قوانين اللوغارتمية			
عرض الامثلة والمناقشة وملاحظة مستوى الطلبة	(شرح أسئلة وأجوبة/ مناقشة)	محاضرة نظري	الأعداد المركبة	-	٢	الاسبوع الخامس والسادس
			التمثيل الهندسي للعدد المركب			
			التفاضل			



عرض الامثلة والمناقشة وملاحظة مستوى الطلبة	(شرح أسئلة وأجوبة/ مناقشة)	محاضرة نظري	علاقة الوحدات الكهربائية بالإعداد المركبة/إيجاد جنور الإعداد المركبة	اسس الرياضيات	-	٢	الاسبوع السابع والثامن
			جبر المشتقات				
			الدوال المتعددة الحدود ومشتقاتها				
عرض الامثلة والمناقشة وملاحظة مستوى الطلبة	(شرح أسئلة وأجوبة/ مناقشة)	محاضرة نظري	قاعدة السلسلة	اسس الرياضيات	-	٢	الاسبوع التاسع والعاشر
			الدالة المركبة- الدالة البارامترية				
عرض الامثلة والمناقشة وملاحظة مستوى الطلبة	(شرح أسئلة وأجوبة/ مناقشة)	محاضرة نظري	معادلة المماس والعمود	اسس الرياضيات	-	٢	الاسبوع الحادي عشر والثاني عشر
			السرعة والتعجيل				
			حسابات تغير الفولتية والتيار بدلالة الزمن				
عرض الامثلة والمناقشة وملاحظة مستوى الطلبة	(شرح أسئلة وأجوبة/ مناقشة)	محاضرة نظري	الغايات	اسس الرياضيات	-	٢	الاسبوع الثالث عشر والرابع عشر



			غاية الدوال الجبرية والمثلثية				
عرض الامثلة والمناقشة وملاحظة مستوى الطلبة	(شرح أسئلة وأجوبة/ مناقشة)	محاضرة نظري	تطبيقات على الغايات	اسس الرياضيات	-	٢	الاسبوع خامس عشر

الوحدة النمطية للأسبوع الأول والثاني

أولاً : النظرة الشاملة

أ – الفئة المستهدفة (Target Population)

طلبة المستوى الأول – قسم تقنيات الالكترونية المعهد التقني / الدور

ب – مبررات الوحدة

تم تصميم هذه الوحدة لكي يتعرف الطالب على التعامل مع أسس الرياضيات وكيفية حل المسائل

ت – الفكرة المركزية (Central Idea)

أولاً : التعرف على المصفوفات

ثانياً : التعرف على العمليات على المصفوفات

ثالثاً : التعرف على المحددات

رابعاً : حل المعادلات الخطية باستخدام المحددات

خامساً : التعرف على المتطابقات

سادساً : حل مسائل اللوغاريتمات

سابعاً : تطبيقات على الأعداد المركبة

ث – أهداف الوحدة

سيكون الطالب بعد انتهاء المحاضرة قادراً على أن :

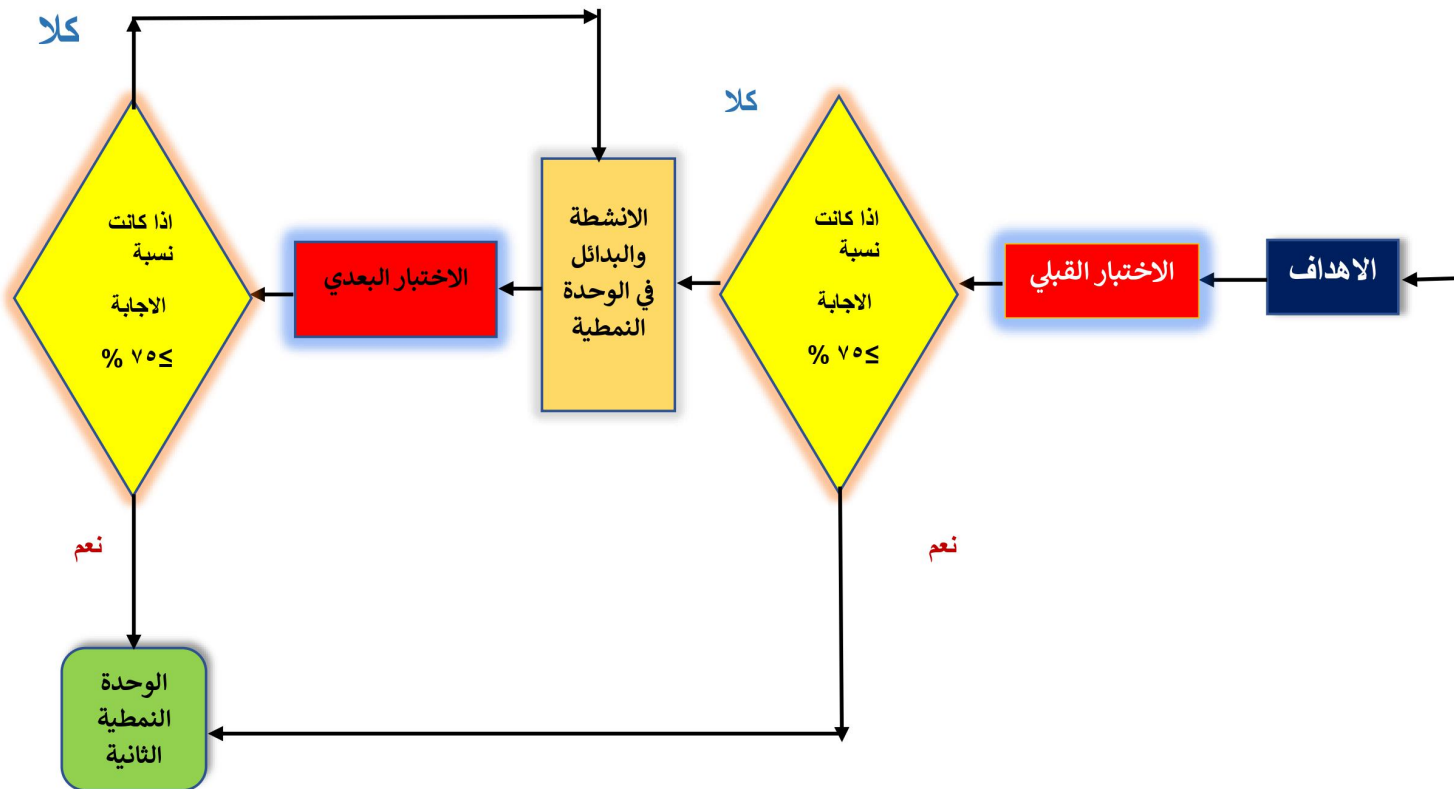
١ – التعرف على المصفوفات وأنواع المصفوفات

٢ – العمليات على المصفوفات (تساوي المصفوفات ، جمع المصفوفات ، طرح المصفوفات ، ضرب المصفوفة في عنصر ثابت ، ضرب المصفوفات)

٣ – التعرف على المحددات

٤ – حل المعادلات الخطية باستخدام المحددات (قاعدة كرامر)

ج - مخطط انسيابي للتدريب بواسطة الوحدة النمطية



ثانيا : الاختبار القبلي

ضع دائرة حول العدد الصحيح

١ - اذا كان $A = \frac{1}{2} \frac{-2}{3}$ جد $3A$ ، $-5A$

(a) $\frac{-6}{-10} \frac{10}{15}$

(b) $\frac{-5}{-10} \frac{10}{-15}$

٢ - اذا كان $A = \frac{2}{4} \frac{-1}{3}$ ، $B = \frac{-1}{2} \frac{1}{4}$ ، جد ناتج $A * B$

(a) $\frac{-4}{2} \frac{-2}{16}$

(b) $\frac{-6}{3} \frac{2}{16}$

ملاحظة

يرجى التحقق من سلامة اجابتك بمراجعة صفحة (مفاتيح الاجابات على الاختبارات) في نهاية الوحدة. ففي حالة حصولك على نسبة اجابة ١٠٠ % فتكون غير محتاج لدراسة هذه المحاضرة واذهب لدراسة الوحدة الثانية. اما في حالة حصولك على درجة اقل من ١٠٠ % فستكون بحاجة لدراسة هذه الوحدة.

ثالثا : عرض الوحدة النمطية

المصفوفات Matrices

المصفوفة : ترتيب معين من العناصر يتكون من عدد من الصفوف (rows) يساوي m وعدد من الأعمدة (columns) يساوي n والنظام كله محاط بقوسين بشكل () أو [] , وتكون أهمية العنصر ليست في قيمته فقط وإنما في موقعه ضمن المصفوفة.
مثال المصفوفة A , كما في الشكل ادناه :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}_{m \times n}$$

وهذه المصفوفة هي بدرجة او سعة ($m \times n$) ويمثل الرقم m عدد الصفوف والرقم n عدد الأعمدة .

أنواع المصفوفات

1. **المصفوفة الصفرية Null matrix** : هي المصفوفة التي كل عنصر فيها قيمته تساوي صفر .
2. **المصفوفة المربعة Square matrix** : هي المصفوفة التي فيها عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة .
3. **المصفوفة القطرية Diagonal matrix** : وهي مصفوفة مربعة عناصرها الغير قطرية هي أصفار .
4. **المصفوفة الواحدة Unite matrix** : وهي مصفوفة مربعة كل عناصرها القطرية تساوي واحد وباقي عناصرها اصفار , ويرمز بالحرف (I) .

مدور (منقول) المصفوفة Transpose of Matrix

المصفوفة A ذات السعة ($m \times n$) يمكن الحصول على مدورها (منقولها) وذلك ببدال الصفوف مكان الأعمدة او بالعكس لنحصل على A^T ذات السعة ($n \times m$) , كما في المثال

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 7 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \quad \Leftarrow \quad \text{منقولها هو} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

العمليات على المصفوفات

1. تساوي المصفوفات Equal Matrices :

يمكن القول ان المصفوفتين A و B متساويتان اذا :

1. كانتا من نفس الدرجة او السعة $(m \times n)$.
2. عناصرها المتناظرة في الموقع متساوية .

مثال : جد قيمة العناصر k_1 , k_2 , k_3 لكي تكون المصفوفة $A = B$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & k_1 & 0 \\ -1 & 4 & 4 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ k_2 & k_3 & 4 \end{bmatrix}$$

لكي $A = B$ يجب أن يكون : $k_1 = 5$, $k_2 = -1$, $k_3 = 4$

2. جمع المصفوفات Addition of Matrices :

إذا كانت A و B مصفوفتان بنفس السعة $(m \times n)$ فإن مجموعهما والذي يكتب $A+B = C$ هي مصفوفة بنفس السعة $C_{m \times n}$ أيضا , عناصرها ناتجة من جمع العناصر في A و B والمتناظرة في الموقع . كما في المثال التالي :

$$\begin{aligned} C = A + B &= \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2+(-1) & (-3)+0 & 5+4 \\ 1+0 & 1+3 & 2+5 \\ 0+2 & 4+1 & 3+(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

خواص جمع المصفوفات:

- 1- قانون الابدال Commutative Law $A+B = B+A$
2- قانون التجميع Associative Law $A + (B+C) = (A+B) + C$

3. طرح المصفوفات Subtraction of Matrices :

إذا كانت A و B مصفوفتان بنفس السعة $(m \times n)$ فإن حاصل طرحهما والذي يكتب $(D = A - B)$ هي مصفوفة بنفس السعة $D_{m \times n}$ أيضا , عناصرها ناتجة من طرح العناصر في B من A والمتناظرة في الموقع . كما في المثال التالي :

$$D = A - B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 - (-1) & -3 - 0 & 5 - 4 \\ 1 - 0 & 1 - 3 & 2 - 5 \\ 0 - 2 & 4 - 1 & 3 - (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

ومن الافضل لإجراء عملية الطرح هو تغيير إشارة عناصر المصفوفة الثانية (B) وإجراء عملية الجمع وكما يلي : $A - B = A + (-B)$

4. ضرب المصفوفة في عنصر ثابت :

إذا ضربت مصفوفة ما بعنصر ثابت فإن جميع عناصرها تضرب بذلك العنصر , وكما موضح في المثال التالي :

مثال : إذا كان $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ جد $3A$, $-5A$.
الحل :

$$3A = 3 \times \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \times 1 & 3 \times (-2) \\ 3 \times 2 & 3 \times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$-5A = -5 \times \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 10 \\ -10 & -15 \end{bmatrix}$$

5. ضرب المصفوفات Multiplication of Matrices :

لتكن المصفوفة $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ولتكن المصفوفة $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ يكون حاصل ضرب $(A \cdot B)$ ممكنا إذا كان عدد اعمدة المصفوفة الاولى A يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية B , ويمكن كتابة حاصل الضرب كما يلي :

$$[a_{ij}]_{m \times n} \times [b_{ij}]_{n \times p} = [C_{ij}]_{m \times p}$$

مثال (1) :

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times (-1) + (-1) \times 2 & 2 \times 1 + (-1) \times 4 \\ 4 \times (-1) + 3 \times 2 & 4 \times 1 + 3 \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 2 & 16 \end{bmatrix}$$

مثال (2) :

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \times 1 + 1 \times (-1) + 2 \times 2 & 0 \times (-2) + 1 \times 0 + 2 \times (-1) \\ 1 \times 1 + 2 \times (-1) + 3 \times 2 & 1 \times (-2) + 2 \times 0 + 3 \times (-1) \\ 2 \times 1 + 3 \times (-1) + 4 \times 2 & 2 \times (-2) + 3 \times 0 + 4 \times (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -5 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

خواص ضرب المصفوفات :

- 1) $A \cdot B \neq B \cdot A$
- 2) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
- 3) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- 4) $A \cdot I = I \cdot A = A$

I هي المصفوفة الواحدة

تمارين محلولة

مثال (1): إذا كانت المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ، جد : A^2 ، A^3

الحل : $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 2 + 1 \times 0 & 2 \times 1 + 1 \times (-1) \\ 0 \times 2 + (-1) \times 0 & 0 \times 1 + (-1) \times (-1) \end{pmatrix}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times 2 + 1 \times 0 & 4 \times 1 + 1 \times (-1) \\ 0 \times 2 + 1 \times 0 & 0 \times 1 + 1 \times (-1) \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

مثال (2): أوجد قيم x, y, z في المصفوفتين المتساويتين :

$$\begin{bmatrix} x+3 & 2y+x \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ z-1 & 6 \end{bmatrix}$$

الحل : إذا تساوت مصفوفتان ، تساوت عناصرهما المتناظرة في الموقع .

$$x+3=0 \Rightarrow x=-3$$

$$2y+x=-1$$

نعوض عن x بـ (-3)

$$2y-3=-1 \Rightarrow 2y=2 \Rightarrow y=1$$

$$3=z-1 \Rightarrow z=4$$

مثال (3) :

أوجد مصفوفة $f(A)$ إذا كان $f(x) = x^2 - 2x + 3$ ، $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$$f(A) = A^2 - 2A + 3A^0$$

الحل:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 4 & 7 \\ -1 & 21 & 5 \\ 16 & -3 & 17 \end{bmatrix}$$

رابعاً : الاختبار البعدي

ضع دائرة حول الاجابة الصحيحة لكل مما ياتي :

١ - اذا كانت A , B مصفوفتان جد ناتج طرحهما

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} (a)$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} (b)$$

٢ - اوجد قيم X , Y , Z في المصفوفتين المتساويتين

$$\begin{pmatrix} X+3 & 2Y+X \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ Z-1 & 6 \end{pmatrix}$$

أ- $X = 3$

$Y = -1$

$Z = 4$

ب- $X = -3$

$Y = 1$

$Z = 4$

مفاتيح الاجابة على الاختبارات

الاختبار البعدي		الاختبار القبلي	
الاجابة الصحيحة	رقم السؤال	الاجابة الصحيحة	رقم السؤال
A	١	A	١
B	٢	B	٢

الوحدة النمطية للاسبوع الثالث والرابع والخامس والسادس

اولا : النظرة الشاملة

أ – الفئة المستهدفة (Target Population)

طلبة المرحلة الاولى – قسم تقنيات الالكترونية المعهد التقني / الدور

ب – مبررات الوحدة

تم تصميم هذه الوحدة لكي يتعرف الطالب على المحددات وحل المعادلات الخطية باستخدام المحددات والنسب المثلثية والمتطابقات.

ت – الفكرة المركزية (Central Idea)

اولا : التعرف على المحددات

ثانيا : حل المعادلات الخطية باستخدام المحددات

ثالثا : حل الامثلة على النسب المثلثية

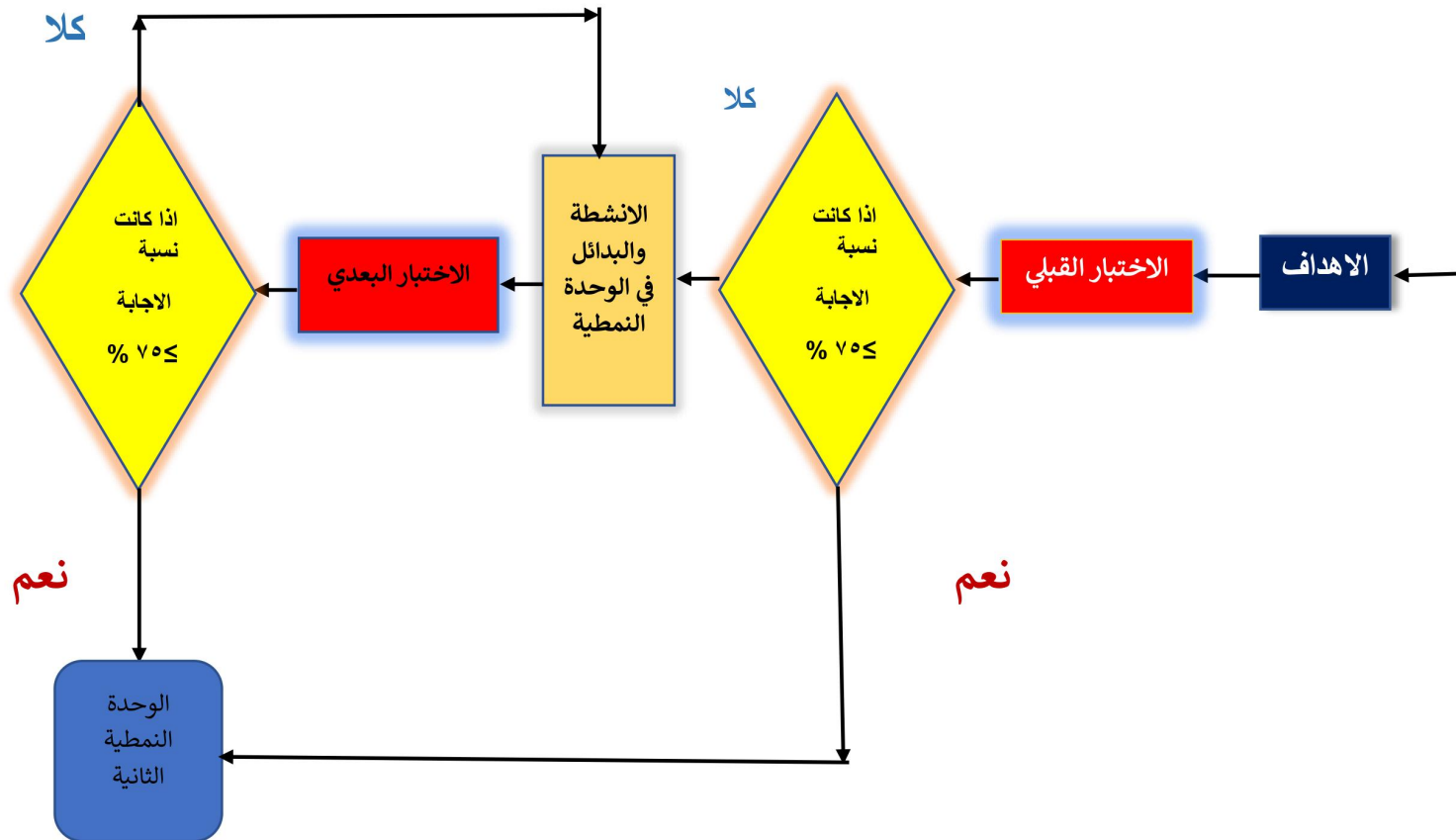
رابعا : حل مسائل المتطابقات

ث – اهداف الوحدة

سيكون الطالب بعد انتهاء المحاضرة قادرا على ان :

١. التعرف على انواع المحددات
٢. حل الامثلة للمعادلات الخطية باستخدام المحددات
٣. حل المسائل للنسب المثلثية
٤. حل الامثلة في المتطابقات

ج - مخطط انسيابي للتدريب بواسطة الوحدة النمطية



ثانيا : الاختبار القبلي

ضع دائرة حول الاجابة الصحيحة لكل مما ياتي :

١- اذا كانت قيمة المحدد A تساوي صفرا، جد قيمة X . $A = \begin{vmatrix} X & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$

$X = -2$ (a)

$X = -3$ (b)

$X = 4$ (c)

٢ - جد قيمة A للمحدد الثلاثي التالي بطريقة التجزئة $A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

-2 (a)

-1 (b)

3 (c)

ملاحظة

يرجى التحقق من سلامة اجابتك بمراجعة صفحة (مفاتيح الاجابات على الاختبارات) في نهاية الوحدة. ففي حالة حصولك على نسبة اجابة ١٠٠ % فتكون غير محتاج لدراسة هذه المحاضرة واذهب لدراسة الوحدة الثانية. اما في حالة حصولك على درجة اقل من ١٠٠ % فستكون بحاجة لدراسة هذه الوحدة.

ثالثا : عرض الوحدة النمطية

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I \text{ المصفوفة الواحدة}$$

$$A^0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix}^0$$

$$\begin{aligned} f(A) &= \begin{bmatrix} 22 & 4 & 7 \\ -1 & 21 & 5 \\ 16 & -3 & 17 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 22 & 4 & 7 \\ -1 & 21 & 5 \\ 16 & -3 & 17 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -2 & -6 \\ -6 & 8 & -2 \\ -10 & -4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 2 & 1 \\ -7 & 32 & 3 \\ 6 & -7 & 20 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

المحددات Determinants

يقابل كل مصفوفة مربعة (أي أن : عدد الصفوف = عدد الأعمدة) والتي عناصرها أعداد حقيقية، يقابلها عدد حقيقي يسمى محدد المصفوفة ويرمز له بـ $(\det A)$ أو $|A|$ ، ويكتب بالصيغة التالية :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}_{2 \times 2} \text{ محدد ثنائي}, \quad |A| = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}_{3 \times 3} \text{ محدد ثلاثي}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 2 \times 8 - (3 \times 5) = 1 \text{ مثال (1): جد قيمة المحدد التالي:}$$

$$\begin{aligned} \text{مثال (2): إذا كانت قيمة المحدد } |A| \text{ تساوي صفرا, جد قيمة } x. \quad A = \begin{vmatrix} x & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \\ |A| = x(-2) - (1 \times 4) = 0 \Rightarrow -2x = 4 \Rightarrow x = -2 \text{ الحل:} \end{aligned}$$

•• حساب قيمة المحدد الثلاثي ••

طريقة التحزبة :- لايجاد قيمة المحدد الثلاثي نختار احد الصفوف او الاعمدة ونقوم بضرب كل عنصر من عناصر ذلك الصف او العمود في المحدد المساعد له Cofactor والذي ينتج

بعد حذف عناصر الصف والعمود الذي يقع فيه ذلك العنصر . ثم نقوم بجمع ناتج الضرب بعد

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

ملاحظة قانون الاشارات الموضح في الرسم التالي :

مثال (3) : جد قيمة $|A|$ للمحدد الثلاثي التالي بطريقة التجزئة :

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

الحل : لسهولة الحل يفضل اختيار الصف او العمود الذي يحتوي ارقام صغيرة وعليه نختار التجزئة بالصف الثاني .:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -(-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + (0) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 1[6 - (-1)] + 0[6 - 3] + 1[-2 - 6] = 7 + 0 - 8 = -1$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

مثال (4) : جد قيمة (x) في المحدد التالي :

$$-2 \begin{vmatrix} 2 & -x \\ 3 & -4 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & -x \\ x & -4 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ x & 3 \end{vmatrix} = 0$$

نختار التجزئة بالصف الثاني

$$= -2[-8 + 3x] - [-12 + x^2] - 3[9 - 2x] = 0$$

$$= 16 - 6x + 12 - x^2 - 27 + 6x = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

2 . الطريقة الخاصة : هناك طريقة خاصة لا يجاد قيمة المحدد الثلاثي فقط , تلخص بإضافة ما يعادل عمودين الى الجهة اليمنى للمحدد ثم نتبع طريقة ضرب الاقطار مع ملاحظة اشارات الاسهم وكما في المثال التالي :

$$D_3 = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 5 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 7 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 6 \times 2 \times 7 + 4 \times 3 \times 2 + 5 \times 1 \times 0 - (2 \times 2 \times 5) - (0 \times 3 \times 6) - (7 \times 1 \times 4) = 60$$

الصفحة 7

حل المعادلات الخطية باستخدام المحددات (قاعدة غرامر)

لحل المعادلات الخطية الانية باستخدام المحددات (طريقة غرامر) أولاً وقبل كل شيء نرتب المعادلات بحيث نجعل المجاهيل بالترتيب في جهة والحد المطلق (الثوابت) في الجهة الاخرى من المعادلة كما في الصيغة العامة التالية :

$$a_1x + a_2y + a_3z = d_1 \dots\dots\dots(1)$$

$$b_1x + b_2y + b_3z = d_2 \dots\dots\dots(2)$$

$$c_1x + c_2y + c_3z = d_3 \dots\dots\dots(3)$$

نضع معاملات المجاهيل في محدد نسميه **D** :

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{بشرط } D \neq 0$$

الان لإيجاد قيمة المجهول **x** نقوم بحذف معاملات **x** وابدالها بعمود الثوابت كما يلي :

$$D_x = \begin{vmatrix} d_1 & a_2 & a_3 \\ d_2 & b_2 & b_3 \\ d_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$x = \frac{D_x}{D} \quad \text{ونحصل على قيمة } x \text{ من قسمة } D_x \text{ على } D :$$

$$y = \frac{D_y}{D} , \quad z = \frac{D_z}{D} \quad \text{وبنفس الطريقة نجد قيم كل من } y , z :$$

تمارين محلولة

مثال (1) : حل المعادلتين الانيتين باستخدام المحددات (طريقة غرامر) ثم تحقق من صحة الناتج : $3x - 5y - 9 = 0$, $4x + 3y + 17 = 0$

$$3x - 5y = 9 \dots\dots\dots(1)$$

$$4x + 3y = -17 \dots\dots\dots(2)$$

الحل : أولاً نرتب الحدود :

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 9 - (-20) = 29 \quad D \neq 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 9 & -5 \\ -17 & 3 \end{vmatrix} = 27 - 85 = -58 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{D_x}{D} = \frac{-58}{29} = -2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 4 & -17 \end{vmatrix} = -51 - 36 = -87 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-87}{29} = -3$$

للتحقق من صحة الناتج, نعوض عن قيم **x** , **y** في المعادلة (1) :

$$3(-2) - 5(-3) = -6 + 15 = 9$$

مثال (2) : حل المعادلات التالية بطريقة كرامر :

$$x + y = 1 - z, \quad 2x + z = y, \quad 2y + x - z = 4$$

$$x + y + z = 1 \dots\dots\dots(1)$$

$$2x - y + z = 0 \dots\dots\dots(2)$$

$$x + 2y - z = 4 \dots\dots\dots(3)$$

الحل : أولاً نرتب الحدود :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 + 1 + 4 - (-2) - 2 - (-1) = 7$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 1 + 4 + 0 - 0 - 2 - (-4) = 7$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 + 1 + 8 - (-2) - 4 - 0 = 7$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 0 + 4 - 8 - 0 - (-1) = -7$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{7}{7} = 1, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{7}{7} = 1, \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{-7}{7} = -1$$

مثال (3) : حل المعادلات التالية بطريقة كرامر :

$$2x - y = 3 - 3z, \quad y + 2 = 0, \quad 2x + y + z = 1$$

$$2x - y + 3z = 3 \dots\dots\dots(1)$$

$$y = -2 \dots\dots\dots(2)$$

$$2x + y + z = 1 \dots\dots\dots(3)$$

الحل : أولاً نرتب الحدود :

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = [2 - 6] = -4$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 0 + (-6) - 2 - 0 - 3 = -8$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 4 + 0 - 0 - (-4) - 6 = 4$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-8}{-4} = 2, \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{4}{-4} = -1$$

النسب المثلثية Trigonometric

المثلث ABC القائم الزاوية في C :

$$\sin A = \frac{a}{c}$$

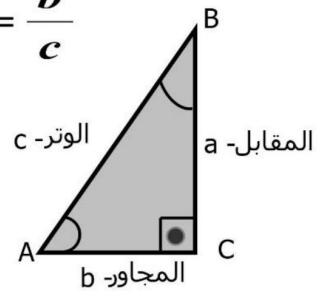
$$\cos A = \frac{b}{c}$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{a}{b}$$

$$\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{b}{a}$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} = \frac{c}{a}$$

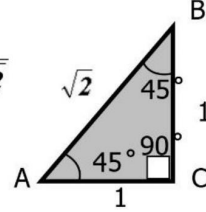
$$\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{c}{b}$$



•• النسب المثلثية الخاصة ••

الزوايا الخاصة هي : (90° , 60° , 45° , 30° , 0°)

$$1. < 45^\circ \quad \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \tan 45^\circ = 1, \quad \cot 45^\circ = 1$$



$$2. < 30^\circ, 60^\circ : \sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ$$

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \cot 60^\circ$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3} = \cot 30^\circ$$

$$\sin 0^\circ = 0 = \cos 90^\circ$$

$$\cos 0^\circ = 1 = \sin 90^\circ$$

$$3. \cot 0^\circ = \infty = \tan 90^\circ$$

$$\tan 0^\circ = \frac{\sin 0^\circ}{\cos 0^\circ} = \frac{0}{1} = 0 = \cot 90^\circ, \quad \tan 90^\circ = \frac{\sin 90^\circ}{\cos 90^\circ} = \frac{1}{0} = \infty$$

ملاحظات مهمة في النسب المثلثية :

مجموع الزوايا الداخلية لأي مثلث تساوي 180°

تقرأ الزوايا بالموجب عندما تكون **عكس** حركة عقارب الساعة

وتقرأ الزوايا بالسالب عندما تكون **باتجاه** حركة عقارب الساعة

القيمة العظمى والصغرى لجيب الزاوية (**sin**) كما يلي : $-1 \leq \sin \leq +1$

القيمة العظمى والصغرى لجيب تمام الزاوية (**cos**) كما يلي : $-1 \leq \cos \leq +1$

$$\text{مثال (1) : جد ناتج ما يأتي :} \\ \text{الحل :}$$

$$\sin 210 + \cos 330 - \tan 135 \\ = \sin(180 + 30) + \cos(-30) - \tan(180 - 45) \\ = -\sin 30 + \cos 30 - (-\tan 45)$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - (-1) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

المتطابقات Identities :-

المتطابقات هي المعادلات التي تصح لجميع القيم الممكنة للمتغير عكس المعادلات التي تكون صحيحة لبعض قيم المتغير ولا تصح لغيرها . وعندما يكون المتغير في المتطابقة قياس زاوية لدالة مثلثية تسمى (متطابقة مثلثية) . ولأجل البرهنة على صحة أي متطابقة مثلثية نحاول ان نجعل احد طرفيها يساوي بالنتيجة الطرف الاخر وذلك بالاعتماد على المتطابقات الاساسية للمثلثات وهي :

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \sec^2 \theta = \tan^2 + 1 \Rightarrow \operatorname{cosec}^2 \theta = \cot^2 \theta + 1$$

متطابقات مجموع قياس زاويتين او الفرق بينهما :

$$\sin(a + b) = (\sin a)(\cos b) + (\cos a)(\sin b)$$

$$\sin(a - b) = (\sin a)(\cos b) - (\cos a)(\sin b)$$

$$\cos(a + b) = (\cos a)(\cos b) - (\sin a)(\sin b)$$

$$\cos(a - b) = (\cos a)(\cos b) + (\sin a)(\sin b)$$

$$\sin(2a) = 2(\sin a)(\cos a) \quad , \quad \cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos(2a)}{2} \quad , \quad \sin^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$$

بالاضافة الى قوانين النسب المثلثية

أمثلة محلولة

مثال (1): برهن صحة المتطابقة التالية :- $\tan^2 \theta - \sin^2 \theta = \tan^2 \theta (\sin^2 \theta)$
الحل : نبرهن ان احد طرفي المتطابقة يساوي الطرف الاخر .

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} - \sin^2 \theta &= \frac{\sin^2 \theta - \sin^2 \theta (\cos^2 \theta)}{\cos^2 \theta} && \text{نبدأ بالطرف الايسر} \\ &= \frac{\sin^2 \theta (1 - \cos^2 \theta)}{\cos^2 \theta} = \tan^2 \theta \sin^2 \theta && \checkmark \end{aligned}$$

مثال (2): برهن صحة المتطابقة : $\sin \theta \sqrt{\operatorname{cosec}^2 \theta - 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}$

الحل: لأجل البرهنة على صحة المتطابقة نحاول ان نغير طرفي المتطابقة الى صيغة واحدة ونبدأ بالطرف الايسر :

$$\sin \theta \sqrt{\operatorname{cosec}^2 \theta - 1} = \sin \theta \sqrt{\cot^2 \theta} = \sin \theta (\cot \theta) = \sin \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cos \theta$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \theta}} = \frac{1}{\sqrt{\sec^2 \theta}} = \frac{1}{\sec \theta} = \cos \theta \quad \checkmark \quad \text{الطرف الايمن :}$$

$$\frac{\cos \theta}{1+\sin \theta} = 2 \sec \theta - \frac{1+\sin \theta}{\cos \theta} \quad \text{مثال (3): برهن صحة المتطابقة :}$$

$$2 \sec \theta - \frac{1+\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{2}{\cos \theta} - \frac{1+\sin \theta}{\cos \theta} \quad \text{الحل: نبدأ بالطرف الايمن :}$$

$$\frac{2-1-\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1-\sin \theta}{\cos \theta} \quad \left[\frac{1+\sin \theta}{1+\sin \theta} \times \text{المقام والبسط} \right]$$

$$\frac{1-\sin \theta}{\cos \theta} \times \frac{1+\sin \theta}{1+\sin \theta} = \frac{1-\sin^2 \theta}{\cos \theta(1+\sin \theta)} = \frac{\cos^2 \theta}{\cos \theta(1+\sin \theta)} = \frac{\cos \theta}{1+\sin \theta} \quad \checkmark$$

المعادلات المثلثية

$$6 \sin^2 x - 5 \sin x + 1 = 0 \quad 0 \leq x \leq 180 \quad \text{(1) حل المعادلة المثلثية التالية :}$$

الحل: لحل المعادلة نحلل الى العوامل الاولى بالتجربة :

$$(3 \sin x - 1)(2 \sin x - 1) = 0$$

$$3 \sin x = 1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \sin^{-1} \left(\frac{1}{3} \right) = 19.47^\circ$$

Either

$$\text{Or } 2 \sin x = 1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \sin^{-1} \left(\frac{1}{2} \right) = 30^\circ$$

بما ان اشارة (sin x) موجبة في الحالتين , والمطلوب قيم x في الربع الاول والثاني (0 ≤ x ≤ 180) نبحث عن قيم x في الربع الثاني التي لها نفس قيمة الجيب للزاويتين : (30°, 19.47°)

$$x = 180 - 30 = 150^\circ \quad x = 180 - 19.47 = 160.53^\circ$$

مجموعة الحل للمعادلة : { 160.53°, 150°, 19.47°, 30° }

$$8 \sin^2 x + 6 \cos x - 9 = 0 \quad 0 \leq x \leq 180 \quad \text{(2) حل المعادلة المثلثية التالية :}$$

الحل: نجعل النسب المثلثية في المعادلة متشابهة بأن نحول $\sin^2 x$ الى $\cos^2 x$:

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \quad \text{بما أن: اذن يمكن ان تكتب المعادلة :}$$

$$8(1 - \cos^2 x) + 6 \cos x - 9 = 0 \Rightarrow 8 - 8 \cos^2 x + 6 \cos x - 9 = 0$$

$$(4 \cos x - 1)(2 \cos x - 1) = 0 \quad \text{اذن : } 8 \cos^2 x - 6 \cos x + 1 = 0 \quad \text{نضرب } \times (-1) :$$

رابعاً : الاختبار البعدي

ضع دائرة حول الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

١. حل المعادلتين الآتيتين باستخدام المحددات (طريقة كرامر) ثم تحقق من صحة الناتج :

$$3X - 5Y - 9 = 0 \quad 4X + 3Y + 17 = 0$$

$$X = 2, Y = 3 \quad (a)$$

$$X = -2, Y = -3 \quad (b)$$

ت - مفاتيح الإجابة على الاختبارات

الاختبار القبلي		الاختبار البعدي	
رقم السؤال	الإجابة الصحيحة	رقم السؤال	الإجابة الصحيحة
١	a	١	b
٢	b		

الوحدة النمطية للاسبوع السابع والثامن والتاسع والعاشر والحادي عشر وثاني عشر وثالث عشر والرابع عشر والخامس عشر

اولا : النظرة الشاملة

أ – الفئة المستهدفة (Target Population)

طلبة المرحلة الاولى – قسم تقنيات الالكترونية المعهد التقني / الدور

ب – مبررات الوحدة

تم تصميم هذه الوحدة لكي يتعرف الطالب على المعادلات المثلثية وقوانين الاسس واللوغاريتمات والاعداد المركبة وعمليات الاعداد المركبة والضرب والرفع والطرح للاعداد المركبة وايجاد الجذور للاعداد المركبة وتطبيقات على الاعداد المركبة والدوال.

ت – الفكرة المركزية (Central Idea)

اولا : التعرف على المعادلات المثلثية وقوانين الاسس واللوغاريتمات

ثانيا : حل المعادلات الاعداد المركبة وعمليات الاعداد المركبة والضرب والرفع والطرح للاعداد المركبة

ثالثا : حل الامثلة وايجاد الجذور للاعداد المركبة

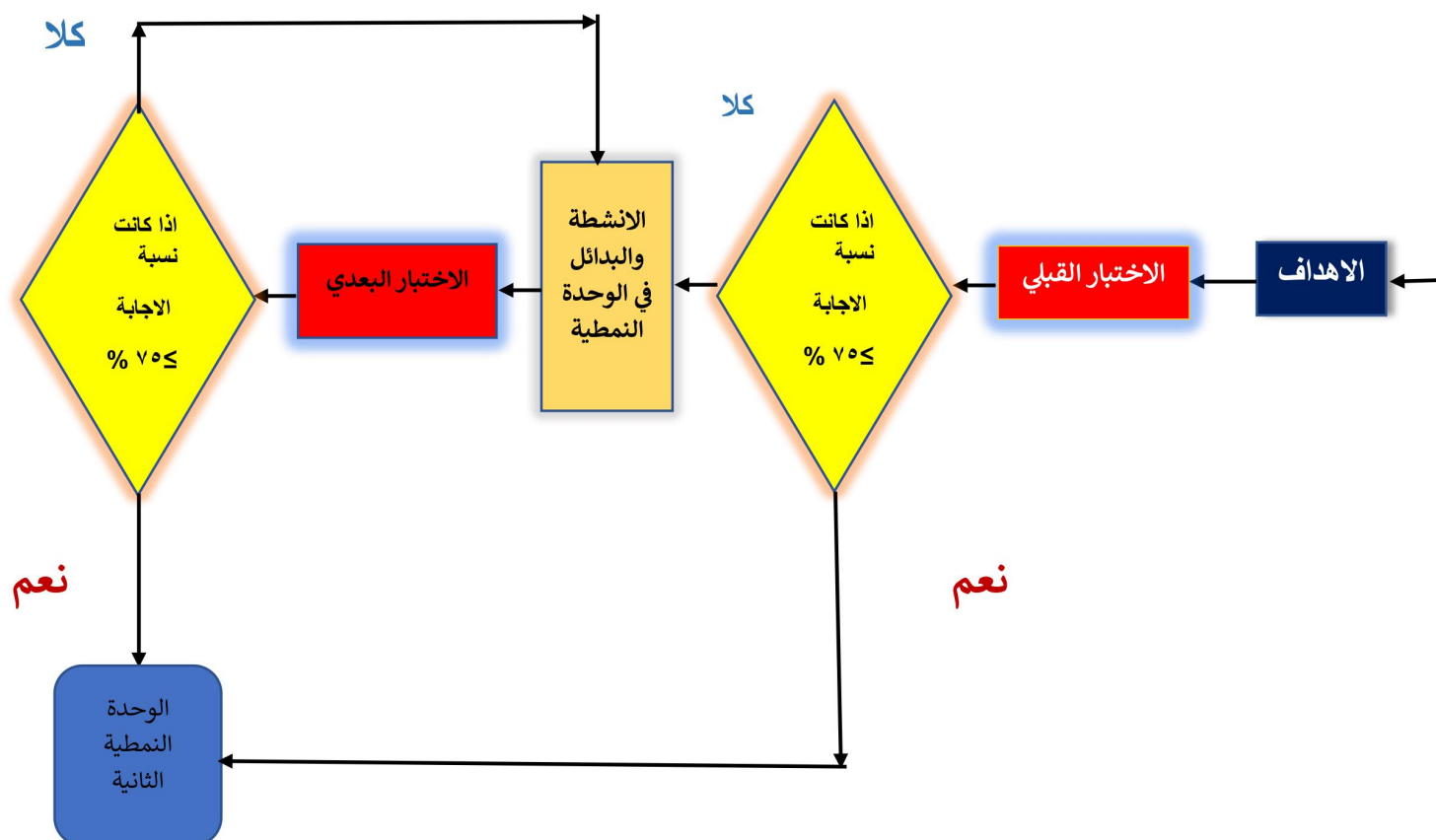
رابعا : حل مسائل تطبيقات على الاعداد المركبة والدوال

ث – اهداف الوحدة

سيكون الطالب بعد انتهاء المحاضرة قادرا على ان :

٢. التعرف على المعادلات المثلثية وقوانين الاسس واللوغاريتمات
٣. حل الامثلة للمعادلات الاعداد المركبة وعمليات الاعداد المركبة والضرب والرفع والطرح للاعداد المركبة
٤. حل المسائل الجذور للاعداد المركبة
٥. حل الامثلة في تطبيقات على الاعداد المركبة والدوال

ج - مخطط انسيابي للتدريب بواسطة الوحدة النمطية



ثانيا : الاختبار القبلي

ضع دائرة حول الاجابة الصحيحة لكل مما ياتي :

١- جد قيمة (X) في كل مما ياتي $\log_{\sqrt{3}} 81 = X$

X = 8 - ٢

X = -6 - ٣

X = 4 - ٤

٢ - جد قيمة (X) $\log_3(2X + 1)$

X = 8 (a

X = 4 (b

X = 6 (c

٣ - جد قيمة (X,Y) التي تحقق المعادلة $(X - Y - 6) + (Y^2 - X) = 0$

X = 10 , Y = 4 (a

X = 9 , Y = 3 (b

٤ - بين منطلق الدالة domain ومداها range في كل من الدوال التالية ، ثم احسب : $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$ لكل منهما

٧ ، ١ ، ٢- (a

٦ ، ٤ ، ٣ (b

ملاحظة

يرجى التحقق من سلامة اجابتك بمراجعة صفحة (مفاتيح الاجابات على الاختبارات) في نهاية الوحدة. ففي حالة حصولك على نسبة اجابة ١٠٠ % فتكون غير محتاج لدراسة هذه المحاضرة واذهب لدراسة الوحدة الثانية. اما في حالة حصولك على درجة اقل من ١٠٠ % فستكون بحاجة لدراسة هذه الوحدة.

ثالثاً : عرض الوحدة النمطية

$$\text{Either } 4 \cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = 75.5^\circ$$

$$\text{or } 2 \cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ$$

بما أن إشارة $\cos x$ موجبة في الحالتين والمطلوب في السؤال قيم x في الربع الأول والثاني $0 \leq x \leq 180$ وحيث أنه لا يوجد جيب تمام موجب في الربع الثاني ، إذن مجموعة الحل للمعادلة هي زوايا الربع الأول فقط : $\{60^\circ, 75.5^\circ\}$

(3) حل المعادلة التالية : $0 \leq x \leq 360^\circ$ $\cos 2x + 3 \cos x = 1$

$$\text{الحل:} \quad \text{بما أن :} \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2 \cos^2 x - 1$$

$$2 \cos^2 x - 1 + 3 \cos x - 1 = 0 \Rightarrow 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0$$

$$(\cos x + 2)(2 \cos x - 1) = 0$$

$$\text{Either } \cos x = -2 \quad \text{يهمل} \quad [-1 \leq \cos \leq +1]$$

$$\text{or } 2 \cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ$$

بما أن إشارة الـ $\cos$ موجبة والمطلوب قيم x في الأرباع الأربعة $0 \leq x \leq 360^\circ$ وحيث أنه لا يوجد $\cos$ موجب إلا في الربعين الأول والرابع ، إذن نبحث عن زوايا مجموعة الحل في الربع الأول والرابع :

$$x = 60^\circ \quad \text{في الربع الأول} \quad , \quad x = 360 - 60 = 300^\circ \quad \text{في الربع الرابع}$$

(4) حل المعادلة التالية : $0 \leq x \leq 360^\circ$ $3 \sec^2 x - 3 \tan x - 9 = 0$

$$\text{الحل : نجعل النسب المثلثية في المعادلة متشابهة:} \quad 3(\tan^2 x + 1) - 3 \tan x - 9 = 0$$

$$3 \tan^2 x - 3 \tan x - 6 = 0 \Rightarrow (3 \tan x + 3)(\tan x - 2) = 0$$

$$\text{Either } 3 \tan x + 3 = 0 \Rightarrow \tan x = -1 \quad x = 135^\circ$$

$$\text{Or } \tan x - 2 = 0 \Rightarrow \tan x = 2 \quad x = 63.43^\circ$$

إشارة $\tan x$ كانت مرة موجبة ومرة سالبة ، والمطلوب زوايا مجموعة الحل في الأرباع الأربعة :

$$x = 180 - 45 = 135^\circ \quad , \quad x = 360 - 45 = 315^\circ \quad \text{الربع الثاني والرابع :}$$

$$x = 63.43^\circ \quad , \quad x = 180 + 63.43 = 243.43^\circ \quad \text{الربع الأول والثالث :}$$

$$\text{إذن مجموعة الحل هي : } \{63.43^\circ, 135^\circ, 243.43^\circ, 315^\circ\}$$

●● قوانين الاسس ●● Laws of Indices

- 1) $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$
- 2) $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$
- 3) $(x^a)^b = x^{a \times b}$, $(x^a \cdot y^b)^c = x^{a \times c} \cdot y^{b \times c}$
- 4) $x^{\frac{a}{b}} = \sqrt[b]{x^a}$
- 5) $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$, $x^a = \frac{1}{x^{-a}}$
- 6) $x^0 = 1$

أمثلة محلولة :

$$- \sqrt[3]{\frac{125}{8000}} = \sqrt[3]{\frac{5^3}{20^3}} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} \quad \text{اختصر المقادير التالية :}$$

$$- 4\sqrt{2} + \sqrt{8} - \sqrt{18} = 4\sqrt{2} + \sqrt{4 \times 2} - \sqrt{9 \times 2} =$$

$$4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = \sqrt{2}(4 + 2 - 3) = 3\sqrt{2}$$

حل المعادلات التالية :

$$- x^{\frac{1}{3}} = 8 \quad \text{نجعل أس المتغير واحد برفع طرفي المعادلة الى الأس 3}$$

$$\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 8^3 \quad \Rightarrow \quad x = 512$$

$$- \frac{e^{2t-3}}{e} = 1 \quad \Rightarrow \quad e^{2t-3} = e$$

$$\therefore 2t - 3 = 1 \quad \Rightarrow \quad \therefore t = 2 \quad \text{إذا تساوت الاساسات تساوت الاسس}$$

$$- 125^x = 5^{x + \frac{1}{2}}$$

$$5^{3x} = 5^{x + \frac{1}{2}}$$

إذا تساوت الاساسات تساوت الاسس

$$3x = x + \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 2x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} - \quad a^{x-1} &= 1 & \text{بما أن: } a^0 &= 1 \\ \therefore a^{x-1} &= a^0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \end{aligned}$$

••Logarithms اللوغاريتمات

لوغاريتم العدد x هو **الاس** الذي اذا رفعنا اليه الاساس a نحصل على x :

$$\log_a x = b \quad (a \neq 1, a > 0, x > 0)$$

$$a^b = x$$

وبصورة عامة يمكن وضع الاعداد بصورتين , صورة أسية و صورة لوغاريتمية:

$$\log_2 32 = 5 \quad \Longleftrightarrow \quad 2^5 = 32$$

$$\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y \quad \text{قوانين اللوغاريتمات :}$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{\log_a x}{n}$$

$$\log_a a = 1, \quad \ln e = 1$$

$$\log_{10} 1 = 0, \quad \ln 1 = 0$$

$$10^{\log a} = a, \quad e^{\ln a} = a$$

اللوغاريتمات العشرية: وهي اللوغاريتمات للأساس 10 وهي كثيرة الاستعمال وقد اتفق على عدم كتابة الاساس 10 عند استعمالها.

اللوغاريتمات الطبيعية: وهي اللوغاريتمات للأساس e حيث ان :

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \Rightarrow e = 2.71828$$

وهي كثيرة الاستعمال في التفاضل والتكامل , ويرمز لها بـ $\ln$

$$y = \log_e x \quad \Rightarrow \quad y = \ln x$$

لتحويل اللوغاريتم لأي أساس الى الأساس 10 او الى الأساس e نستعمل القانون التالي :

$$\log_a x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} a} = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$\log_e x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} e} = \frac{\log_{10} x}{0.4343} \Rightarrow \therefore \ln x = 2.3 \log_{10} x$$

امثلة محلولة :

1) $\log_{\sqrt{3}} 81 = x$ جد قيمة (x) في كل مما يلي :

$$(\sqrt{3})^x = 81 \Rightarrow (3)^{\frac{x}{2}} = 3^4$$

$$\therefore \frac{x}{2} = 4 \Rightarrow x = 8$$
 إذا تساوت الاساسات تساوت الاسس :

2) $\log_3(2x+1) = 2 \Rightarrow 2x+1 = 3^2 \Rightarrow x = 4$

3) $2 \ln x - \ln(5-4x) = 0$ بما ان : $\ln 1 = 0$

$$\therefore \ln \frac{x^2}{5-4x} = \ln 1 \Rightarrow \therefore \frac{x^2}{5-4x} = 1$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0 \Rightarrow (x+5)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = -5, \quad x = 1$$

4) $30 = e^x$ نأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس e :

$$\ln 30 = x \ln e \Rightarrow \therefore x = \ln 30 = 3.401$$

5) $e^{3x} = 2e^x$

$$\frac{e^{3x}}{e^x} = 2 \Rightarrow e^{2x} = 2$$
 الان نأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس e :

$$2x \ln e = \ln 2 \Rightarrow \therefore x = \frac{\ln 2}{2} = 0.347$$

6) $\log_2(x^2 + 5x + 2) = 4 \Rightarrow 2^4 = x^2 + 5x + 2$

$$x^2 + 5x - 14 = 0 \Rightarrow (x+7)(x-2) = 0$$

$$x = -7, \quad x = 2$$

الاعداد المركبة Complex Numbers

عند حل بعض معادلات الدرجة الثانية باستخدام قانون الدستور, قد نحصل على حل يتضمن جذور تربيعية لأعداد سالبة , كما في المعادلة التالية :

$$x^2 + 2x + 2 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm \frac{\sqrt{-4}}{2}$$

ومن المعلوم ان مربع كل من الاعداد الموجبة والسالبة ناتجه موجب :

$$(2)^2 = 4 , \quad (-2)^2 = 4$$

اذن لا يوجد عدد حقيقي من جذر تربيعي لعدد سالب .

ولأجل حل مثل هذه المعادلات نعتمد على فكرة الاعداد المركبة , ويمكننا الان ان نجد حلا للمعادلة اعلاه باستخدام وحدة الاعداد الخيالية (j) , والتي تساوي : $j = \sqrt{-1}$

$$x = -1 \pm \frac{\sqrt{4 \times (-1)}}{2} = -1 \pm \frac{2\sqrt{-1}}{2} \Rightarrow \therefore x = -1 + j , \quad x = -1 - j$$

ان هذا النوع من الاعداد يسمى الاعداد المركبة (Z) وصيغته الجبرية هي: $Z = x + jy$ ويتكون العدد المركب من جزئين هما : الجزء الحقيقي ويرمز له R_Z ويتمثل بالعدد x .
الجزء الخيالي ويرمز له I_Z ويتمثل بالعدد y .

حيث ان كل من (x, y) عددان حقيقيان , و j هي وحدة الاعداد الخيالية وتساوي $j = \sqrt{-1}$

$$j^2 = -1 , \quad j^3 = j^2 \cdot j = (-1) \cdot j = -j , \quad j^4 = j^2 \cdot j^2 = (-1)(-1) = 1$$

مثال : اكتب العدد المركب $Z = (-1, 5)$ بالصيغة الجبرية .

$$\text{الحل : } Z = x + jy \Rightarrow x = R_Z = -1 , \quad y = I_Z = 5$$

$$\therefore Z = -1 + j5$$

الخاصة الأولى : يكون العدد المركب (Z) مساوياً للصفر , إذا كان كل من جزئيه الحقيقي والخيالي يساوي صفر .

$$Z = x + jy = 0 \Rightarrow \therefore x = 0 , \quad y = 0$$

الخاصة الثانية : يتساوى العددين المركبان فقط إذا تساوى جزئيتهما الحقيقيان وتساوى جزئيتهما الخياليان . فإذا كان :

$$x_1 + jy_1 = x_2 + jy_2 \Rightarrow x_1 = x_2 , \quad y_1 = y_2$$

مثال : جد قيمة x, y التي تحقق المعادلة: $(x - y - 6) + j(y^2 - x) = 0$

الحل : بموجب الخاصية الاولى : $x - y - 6 = 0$ ----- (1)

$$y^2 - x = 0$$
 ----- (2)

من المعادلة (1) نحصل على $x = y + 6$, نعوض قيمة x في المعادلة (2) :

$$y^2 - (y + 6) = 0 \Rightarrow y^2 - y - 6 = 0$$

$$(y - 3)(y + 2) = 0 \Rightarrow y_1 = 3, y_2 = -2, x_1 = 9, x_2 = 4$$

•• مرافق العدد المركب ($\bar{Z}$) Complex Conjugate

إن مرافق العدد المركب $Z = x + jy$ والذي يرمز له $\bar{Z}$ هو :

$$\bar{Z} = x - jy$$

إي أنه ينتج بتغيير إشارة الجزء الخيالي للعدد المركب .

امثلة :

$$\bar{Z} = 2 + j3 \text{ هو } Z = 2 - j3$$

$$\bar{Z} = 2 \text{ هو } Z = 2$$

$$\bar{Z} = j2 \text{ هو } Z = -j2$$

•• القيمة المطلقة للعدد المركب $|Z|$ Absolute Value

$$Z = x + jy \Rightarrow |Z| = |x + jy| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

أي أن القيمة المطلقة هي مقدار حقيقي غير سالب .

مثال : جد القيمة المطلقة للعددين المركبين : $Z_1 = 4 + j3$, $Z_2 = -j3$

$$|Z_1| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$|Z_2| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = \sqrt{0 + 9} = \sqrt{9} = 3$$

•• العمليات الأساسية للأعداد المركبة

تجري العمليات الأساسية على الأعداد المركبة (الجمع , الطرح , الضرب , القسمة) بإتباع قواعدها على الأعداد الحقيقية مع ملاحظة أن $(j^2 = -1)$ كما موضح في الأمثلة التالية :

مثال (1) : إذا كان : $Z_1 = 1 + j2$, $Z_2 = 2 - j$ عددان مركبان . إجري العمليات الحسابية التالية :

$$1) Z_1 + Z_2, 2) Z_1 - Z_2, 3) Z_1 \cdot Z_2, 4) \frac{Z_1}{Z_2}, 5) \frac{1}{Z_1}$$

الحل :

$$1) Z_1 + Z_2 = 1 + j2 + 2 - j = 3 + j$$

$$2) Z_1 - Z_2 = 1 + j2 - (2 - j) = -1 + j3$$

$$3) Z_1 \cdot Z_2 = (1 + j2) \cdot (2 - j) = 1 \times 2 - j + j4 - j^2 2 = 2 + j3 + 2 = 4 + j3$$

$$4) \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{1 + j2}{2 - j} \cdot \frac{2 + j}{2 + j} = \frac{2 + j + j4 - 2}{2^2 - j^2} = \frac{j5}{5} = j$$

$$5) \frac{1}{Z_1} = \frac{1}{1 + j2} \cdot \frac{1 - j2}{1 - j2} = \frac{1 - j2}{1 + 4} = \frac{1}{5} - j \frac{2}{5}$$

ملاحظة : إذا كان الجزء الخيالي موجود في مقام الكسر ، فيجب ضربه في مرافق العدد المركب لتحويله إلى حقيقي كما في المثال أعلاه .

مثال (2) : إذا كان $Z_1 = 1 - j$ ، $Z_2 = -2 + j4$ عددان مركبان . أوجد قيمة
 1) $|Z_1 \cdot Z_2|$ ، 2) $2\bar{Z}_1 - 3$ ، 3) Z_2^2 ، 4) $Z_2 \cdot \bar{Z}_2$ ، 5) $\left| \frac{Z_2}{Z_1} \right|$: كلا مما يأتي :

الحل :

$$1) |Z_1 \cdot Z_2| = |Z_1| \cdot |Z_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{20} = 2\sqrt{10}$$

$$2) 2\bar{Z}_1 - 3 = 2(1 + j) - 3 = 2 + j2 - 3 = -1 + j2$$

$$3) Z_2^2 = (-2 + j4)^2 = 4 + (-j16) + j^2 16 = 4 - j16 - 16 = -4(3 + j4)$$

$$4) Z_2 \cdot \bar{Z}_2 = (-2 + j4)(-2 - j4) = 4 + j8 - j8 - j^2 16 = 4 + 16 = 20$$

ملاحظة : عندما يضرب العدد المركب $\times$ مرافقه يكون الناتج عدداً حقيقياً

$$5) \left| \frac{Z_2}{Z_1} \right| = \frac{|Z_2|}{|Z_1|} = \frac{\sqrt{(-2)^2 + (4)^2}}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \sqrt{10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{10}$$

مثال (3) : جد قيمة (c, b) حتى يحقق متعدد الحدود من الدرجة الثانية :

$$P(x) = x^2 + bx + c$$

الناتج التالية :

$$1) P(1 - j) = 0 , \quad 2) P(1 - j) = 2 + j$$

$$1) P(1 - j) = (1 - j)^2 + b(1 - j) + c$$

الحل :

$$0 = 1 - j2 + (j)^2 + b - jb + c = 1 - 1 + b + c + j(-2 - b)$$

$$0 = b + c + j(-2 - b) \Rightarrow b + c = 0 , \quad c = -b \quad \text{الخاصية الاولى}$$

$$(-2 - b) = 0 \Rightarrow \therefore b = -2 , \quad c = -(-2) = 2$$

$$2) P(1-j)=b+c+j(-2-b)$$

$$2+j=b+c+j(-2-b)$$

$$\therefore b+c=2 \Rightarrow c=2-b$$

$$(-2-b)=1 \Rightarrow \therefore b=-3, \quad c=5$$

الخاصية الثانية

مثال (4) : جد العدد المركب الذي اذا ضرب بالعدد $(1-j5)$ يكون الناتج $2+j3$:

$$(x+jy)(1-j5)=2+j3 \quad \text{الحل : نفرض العدد المركب : } Z=x+jy$$

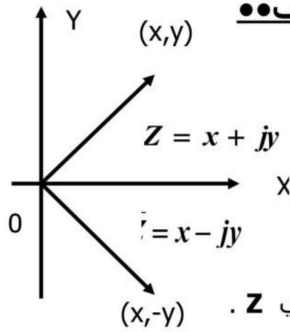
$$x+5y+j(y-5x)=2+j3 \quad \therefore x+5y=2 \Rightarrow x=2-5y$$

$$y-5x=3 \Rightarrow y-5(2-5y)=3 \Rightarrow 26y=13$$

$$\therefore y=\frac{1}{2}, \quad x=\frac{-1}{2} \Rightarrow Z=\frac{-1}{2}+j\frac{1}{2}$$

العدد المركب هو

●● التمثيل الهندسي للعدد المركب ●●



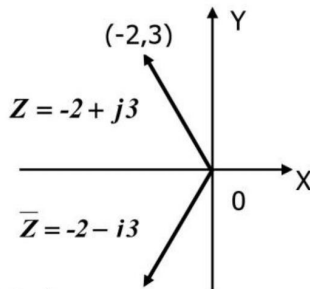
كل عدد مركب $Z=x+jy$ يقابل نقطة احداثياتها (x,y) من المستوي xy , وكل عدد مركب يمكن تمثيله بمتجه **vector** بدايته نقطة الاصل $(0,0)$ ونهايته النقطة التي تقابل ذلك العدد (او باي متجه آخر يساويه).

يسمى المحور x بالمحور الحقيقي والمحور y بالمحور الخيالي والمستوي xy بمستوي الاعداد المركبة او المستوي Z .

مرافق العدد المركب $Z=x+jy$ هو العدد المركب $\bar{Z}=x-jy$ وتمثيله هندسياً يكون بالنقطة $(x,-y)$ والتي هي انعكاس للنقطة (x,y) بالنسبة للمحور x .

مثال : مثل هندسيا العدد المركب $Z = -2 + j3$ ومثل ايضاً مرافقه بمتجهين في المستوي Z .

الحل :

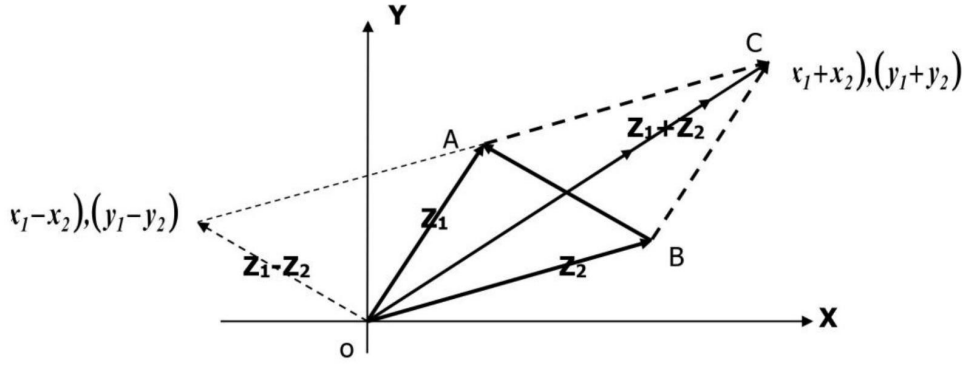


$$Z = -2 + j3 \Rightarrow Z = (-2, 3)$$

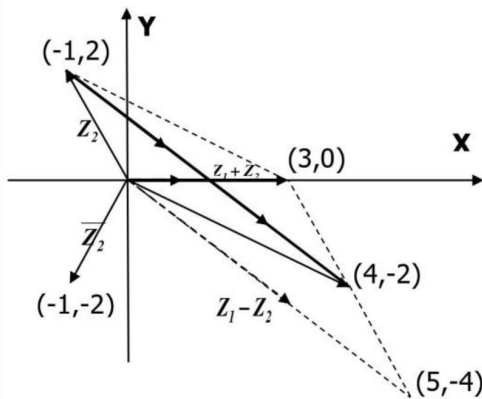
$$\bar{Z} = -2 - j3 \Rightarrow \bar{Z} = (-2, -3)$$

التمثيل الهندسي لمجموع وحاصل طرح عددين مركبين (-2,-3)

إذا كان Z_1 , Z_2 عددان مركبان كما يلي: $Z_1 = x_1 + jy_1$, $Z_2 = x_2 + jy_2$ ممثلان في المستوي Z بالمتجهين $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ على التوالي وعند اكمال متوازي الاضلاع $OACB$ فالنقطة التي تقابل مجموع العددين $Z_1 + Z_2$ واحداثياتها $(x_1 + x_2), (y_1 + y_2)$ تمثل هندسياً المتجه $\vec{OC}$ (قطر متوازي الاضلاع). اما حاصل الطرح $Z_1 - Z_2$ واحداثياتها $(x_1 - x_2), (y_1 - y_2)$ فيمثل بمتجه بدايته النقطة Z_2 ونهايته النقطة Z_1 وهو المتجه $\vec{BA}$, اي ان مجموع العددين المركبين $Z_1 + Z_2$ وحاصل طرحهما $Z_1 - Z_2$ يمثلان قطري متوازي الاضلاع $OACB$ كما موضح في الشكل :



مثال 1 : العددان المركبان $Z_1 = 4 - j2$, $Z_2 = -1 + j2$ مثل هندسياً بالرسم كل من: Z_1 , $\bar{Z}_2$, $Z_1 + Z_2$, $Z_1 - Z_2$



الحل : $Z_1 = (4, -2)$, $Z_2 = (-1, 2)$
 $\bar{Z}_2 = -1 - j2 \Rightarrow \bar{Z}_2 = (-1, -2)$

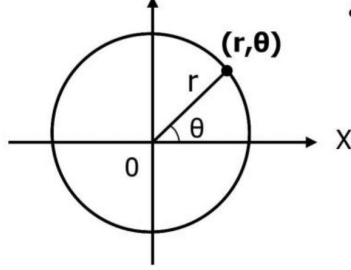
$$Z_1 + Z_2 = 4 - j2 + (-1 + j2) = 3$$

$$\therefore Z_1 + Z_2 = (3, 0)$$

$$Z_1 - Z_2 = 4 - j2 - (-1 + j2) = 5 - j4$$

$$\therefore Z_1 - Z_2 = (5, -4)$$

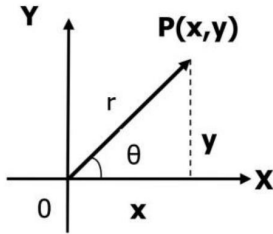
العدد المركب في الاحداثيات القطبية : Polar Coordinates



المحاور القطبية (المثلثية) نظام آخر لتعيين موقع النقطة في المستوي , فموقع النقطة (r, θ) بالنسبة للمحاور القطبية , يمثل r فيه نصف قطر دائرة مركزها نقطة الاصل و θ هي الزاوية التي يصنعها نصف القطر r مع المحور OX .

فاذا كانت (r, θ) احداثيات قطبية تقابل النقطة $P(x, y)$ التي تمثل العدد المركب (غير الصفر) : $Z = x + jy$, ولما

$$x = r \cos \theta \quad , \quad y = r \sin \theta \quad : \text{كان}$$



اذن يمكن كتابة العدد المركب (Z) بالصيغة القطبية التالية :

$$Z = x + jy = r(\cos \theta + j \sin \theta) = r e^{j\theta}$$

الصيغة الجبرية

الصيغة القطبية (المثلثية)

الصيغة
الأسية

اما مرافق العدد المركب **complex conjugate** لصيغ العدد الثلاثة فهي :

$$\therefore \bar{Z} = x - jy = r(\cos \theta - j \sin \theta) = r e^{-j\theta}$$

حيث ان (r) هو طول المتجه الذي يمثل العدد المركب (Z) أي ان : $r = |Z|$ ويسمى مقياس العدد المركب (Z) ويرمز له **modulus (mod Z)** حيث ان :

$$r = |Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

اما زاوية العدد المركب θ التي يصنعها المتجه r مع المحور X الموجب (باتجاه عكس عقارب الساعة) فتقاس بالتقدير الدائري وتسمى سعة العدد المركب **argument** ويرمز لها $(\arg Z)$ ويمكن ايجادها من المعادلة التالية (على ان نلاحظ الربع الذي تقع فيه النقطة (x, y)) :

$$\tan \theta = \frac{I_{(Z)}}{R_{(Z)}} \Rightarrow \therefore \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad , \quad 0 \leq \arg Z(\theta) \leq 2\pi$$

وغالباً ما يتم اختصار التعبير عن الاعداد المركبة بالصيغة التالية : $Z = r \angle \theta$

مثال : اكتب العدد المركب : $Z = 2 \angle 60^\circ$ بالصيغة الجبرية والقطبية والاسية .
الحل : $r = 2$, $\theta = 60^\circ \Rightarrow x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$
 $x = 2 \cos 60^\circ = 2 \times \frac{1}{2} = 1$, $y = 2 \sin 60^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$
 $\therefore Z = x + jy = 1 + j\sqrt{3}$ الصيغة الجبرية

لكتابة العدد بالصيغة القطبية نحول الزاوية الى التقدير الدائري بان نضرب الدرجات $\times \frac{\pi}{180}$

$$\therefore \theta = 60 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$$

$$Z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + j \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 e^{j \frac{\pi}{3}} \quad \text{اذن العدد بالصيغة القطبية والاسية} =$$

• (الضرب - الرفع - القسمة) للأعداد المركبة •

إذا كان:

$$Z_1 = r_1 (\cos \theta_1 + j \sin \theta_1) \quad , \quad Z_2 = r_2 (\cos \theta_2 + j \sin \theta_2)$$

1) $Z_1 \cdot Z_2 = r_1 \cdot r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + j \sin(\theta_1 + \theta_2)]$ قانون الضرب

2) $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + j \sin(\theta_1 - \theta_2)]$ قانون القسمة

3) $Z^n = r^n [\cos(n\theta) + j \sin(n\theta)]$ قانون الرفع

تمارين محلولة

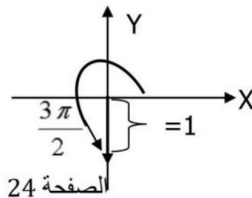
1) . اكتب العدد المركب ($Z = -j$) بالصيغة القطبية والاسية مع

الرسم: الحل:

$$Z = -j \Rightarrow Z = (0, -1) \quad \therefore x = 0 \quad , \quad y = -1$$

$$r = |Z| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1 \quad , \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} = \tan^{-1} \frac{-1}{0} = -\infty$$

من التمثيل الهندسي للعدد المركب نجد ان : $\theta = 270^\circ$
قاعدة : لتحويل الزوايا من الدرجات الى التقدير الدائري :



الصفحة 24

$$\theta = 270 \times \frac{\pi}{180} = \frac{3}{2}\pi \quad : \quad \frac{\pi}{180} \times \text{نضرب الدرجات}$$

$$\therefore Z = -j = 1 \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{2} + j \sin \frac{3\pi}{2} \right) = e^{j\frac{3\pi}{2}}$$

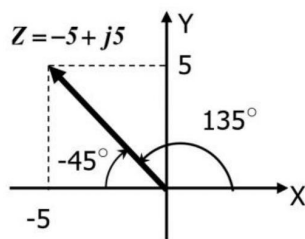
(2) اكتب العدد المركب $Z = 3 \cdot e^{j\frac{\pi}{3}}$ في الصيغة الجبرية .

$$\text{الحل : } r = 3, \quad \theta = \frac{\pi}{3} = 60^\circ \Rightarrow x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

$$x = r \cos 60 = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad y = r \sin 60 = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore Z = \frac{3}{2} + j \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \text{اذن العدد المركب هو :}$$

(3) . اكتب العدد المركب $Z = j(j5 + 5)$ بالصيغة القطبية والاسية مع الرسم :
الحل : $Z = j(j5 + 5) = -5 + j5 \Rightarrow x = -5, \quad y = 5$



$$r = |Z| = \sqrt{(-5)^2 + (5)^2} = 5\sqrt{2}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{5}{-5} = -1 \Rightarrow \therefore \theta = -45^\circ$$

نرسم التمثيل الهندسي للعدد المركب :

بما أن (y) موجب و (x) سالب هذا يعني أن الزاوية في الربع

$$\therefore \theta = 135 \times \frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{4} \quad \text{الثاني}$$

$$\therefore \theta = 180 - 45 = 135^\circ$$

$$\therefore Z = 5\sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{4} + j \sin \frac{3\pi}{4} \right) = 5\sqrt{2} \cdot e^{j\frac{3\pi}{4}}$$

(4) . اكتب العدد المركب : $Z = 4 \angle 90^\circ$ في الصيغة الجبرية ثم بين مرافق العدد.

$$r = 4, \quad \theta = 90^\circ = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad \underline{\text{الحل:}}$$

$$x = 4 \cos 90 = 4(0) = 0, \quad y = 4 \sin 90 = 4(1) = 4$$

$$Z = x + jy = 0 + j4 = j4 \quad \text{الصيغة الجبرية}$$

$$Z = 4 \left(\cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} \right) = 4 e^{j \frac{\pi}{2}} \quad \text{الصيغة القطبية والاسية}$$

مرافق العدد المركب للصيغ الثلاثة :

$$\bar{Z} = -j4 = 4 \left(\cos \frac{\pi}{2} - j \sin \frac{\pi}{2} \right) = 4 e^{-j \frac{\pi}{2}}$$

$$(5) . \text{ اكتب الاعداد } Z_1 = \frac{1}{2}(1 + j\sqrt{3}) \text{ و } Z_2 = \sqrt{3} + j \text{ في الصيغة}$$

$$\text{القطبية ثم جد من الصيغة نفسها } \bar{Z}_2^3, Z_1^3, \frac{Z_2}{Z_1}, Z_1 \cdot Z_2$$

مع توضيح التمثيل الهندسي لكل منها بالرسم .

الحل:

$$r_1 = |Z_1| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = 1, \quad r_2 = |Z_2| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} = 2$$

$$\tan \theta_1 = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3} \Rightarrow \theta_1 = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$$

$$\tan \theta_2 = \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta_2 = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore Z_1 = \frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{3} + j \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\therefore Z_2 = \sqrt{3} + j = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{6} + j \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = r_1 \cdot r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + j \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) \right) = 2 \left(\cos\frac{\pi}{2} + j \sin\frac{\pi}{2} \right) = j2$$

$$\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{r_2}{r_1} [\cos(\theta_2 - \theta_1) + j \sin(\theta_2 - \theta_1)]$$

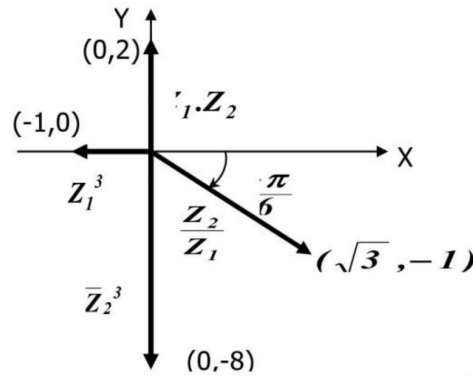
$$\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{2}{1} \left[\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right) \right] = 2 \left[\cos\frac{-\pi}{6} + j \sin\frac{-\pi}{6} \right]$$

$$\frac{Z_2}{Z_1} = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - j \frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} - j$$

$$Z_1^3 = r_1^3 (\cos 3\theta_1 + j \sin 3\theta_1) = 1 (\cos \pi + j \sin \pi) = -1 + j(0) = -1$$

$$\overline{Z_2} = 2 \left(\cos\frac{\pi}{6} - j \sin\frac{\pi}{6} \right) \quad : \quad \overline{Z_2} \text{ نجد أولاً} \quad \overline{Z_2}^3 \text{ لايجاد}$$

$$\overline{Z_2}^3 = 2^3 \left(\cos 3 \times \frac{\pi}{6} - j \sin 3 \times \frac{\pi}{6} \right) = 8 \left(\cos\frac{\pi}{2} - j \sin\frac{\pi}{2} \right) = -j8$$



ايجاد جذور الاعداد المركبة
Roots of complex numbers

ان عملية ايجاد الجذور النونية $Z^{\frac{1}{n}}$ للعدد المركب Z هي حل للمعادلة :
أي ايجاد قيم Z التي تحقق المعادلة (1) : $Z^n = Z \dots\dots\dots (1)$

عندما يكون كل من Z والعدد الصحيح الموجب n معلومين , وحسب نظرية دي مويفر De Moivre's theorem , وإذا كان :

$$Z = r(\cos \theta + j \sin \theta) \quad Z^n = r^n [\cos(n\theta) + j \sin(n\theta)]$$

وحيث n عدد صحيح موجب فان :

$$\sqrt[n]{Z} = Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{\theta}{n} + j \sin \frac{\theta}{n} \right]$$

اما $\sqrt[n]{Z}$ فيساوي : ويمكن الحصول على n من الجذور (الحلول) للعدد المركب $\sqrt[n]{Z}$ عندما $Z \neq 0$

$$\sqrt[n]{Z} = Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + j \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right]$$

بالتقدير الدائري

$$\sqrt[n]{Z} = Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{\theta + 360k}{n} + j \sin \frac{\theta + 360k}{n} \right]$$

بالتقدير بالدرجات

$$[k = 0, 1, 2, 3, \dots, (n-1)]$$

وهندسياً فان طول كل متجهة من المتجهات التي عددها n والتي تمثل جذور العدد

المركب $\sqrt[n]{Z}$ هو $r^{\frac{1}{n}}$, وان الزاوية $\frac{\theta}{n}$ تمثل زاوية العدد المركب لأحد الجذور وان

زوايا الجذور الاخرى نحصل عليها باضافة مضاعفات $\frac{2\pi}{n}$ الى الزاوية $\frac{\theta}{n}$.

مثال (1): اذا كان العدد المركب $Z = 16 / 60^\circ$ جد $\sqrt[4]{Z}$

الحل : $r = 16$, $\theta = 60^\circ$, $n = 4$, $k = 0, 1, 2, 3$

$$\sqrt[n]{Z} = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{\theta + 360k}{n} + j \sin \frac{\theta + 360k}{n} \right]$$

$$\sqrt[4]{Z} = 16^{\frac{1}{4}} \left[\cos \frac{60 + 360(0)}{4} + j \sin \frac{60 + 360(0)}{4} \right]$$

$$Z_1 = 2(\cos 15 + j \sin 15) \quad \text{الجذر الاول}$$

$$= 16^{\frac{1}{4}} \left[\cos \frac{60 + 360(1)}{4} + j \sin \frac{60 + 360(1)}{4} \right]$$

$$Z_2 = 2(\cos 105 + j \sin 105) \quad \text{الجذر الثاني}$$

$$= 16^{\frac{1}{4}} \left[\cos \frac{60 + 360(2)}{4} + j \sin \frac{60 + 360(2)}{4} \right]$$

الجزء الثالث : $Z_3 = 2(\cos 195 + j \sin 195)$

$$= 16^{\frac{1}{4}} \left[\cos \frac{60 + 360(3)}{4} + j \sin \frac{60 + 360(3)}{4} \right]$$

الجزء الرابع : $Z_4 = 2(\cos 285 + j \sin 285)$

مثال (2): جد الجذور الثلاثة للعدد المركب $Z = -1 + j$ مع تمثيل الجذور بالرسم .

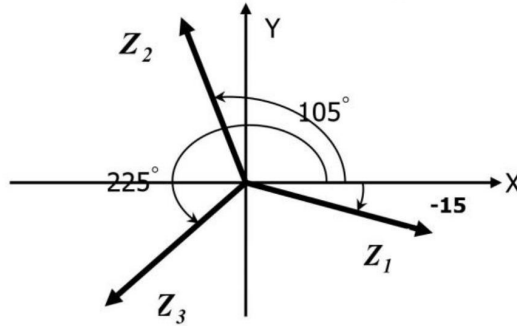
$$r = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2} \quad , \quad \theta = \tan^{-1} \frac{1}{-1} = -45^\circ = \frac{-\pi}{4} \quad \text{الحل:}$$

$$n = 3 \quad , \quad k = 0, 1, 2$$

$$\sqrt[3]{Z} = (\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} \left[\cos \frac{-45}{3} + j \sin \frac{-45}{3} \right] = 2^{\frac{1}{6}} [\cos(-15) + j \sin(-15)]$$

$$Z_2 = 2^{\frac{1}{6}} \left[\cos \frac{-45 + 360(1)}{3} + j \sin \frac{-45 + 360(1)}{3} \right] = 2^{\frac{1}{6}} [\cos(105) + j \sin(105)]$$

$$Z_3 = 2^{\frac{1}{6}} \left[\cos \frac{-45 + 360(2)}{3} + j \sin \frac{-45 + 360(2)}{3} \right] = 2^{\frac{1}{6}} [\cos(225) + j \sin(225)]$$



مثال (3): حل المعادلة التالية $Z^6 - 1 = 0$

$$Z^6 - 1 = 0 \Rightarrow Z^6 = 1 \Rightarrow \therefore Z = \sqrt[6]{1} \quad \text{الحل:}$$

$$\therefore x = 1, y = 0 \Rightarrow r = \sqrt{(1)^2 + 0} = 1 \quad , \quad \theta = \tan^{-1} \frac{0}{1} = 0$$

$$n = 6 \quad , \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$$\sqrt[n]{Z} = Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + j \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right]$$

$$Z_1 = 1(\cos 0 + j \sin 0) = 1(1 + j(0)) = 1$$

$$Z_2 = 1\left(\cos \frac{0+2(1)\pi}{6} + j \sin \frac{0+2(1)\pi}{6}\right) = 1\left(\cos \frac{\pi}{3} + j \sin \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Z_3 = 1\left(\cos \frac{0+2(2)\pi}{6} + j \sin \frac{0+2(2)\pi}{6}\right) = 1\left(\cos \frac{2\pi}{3} + j \sin \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Z_4 = 1\left(\cos \frac{0+2(3)\pi}{6} + j \sin \frac{0+2(3)\pi}{6}\right) = 1(\cos \pi + j \sin \pi) = -1$$

$$Z_5 = 1\left(\cos \frac{0+2(4)\pi}{6} + j \sin \frac{0+2(4)\pi}{6}\right) = 1\left(\cos \frac{4\pi}{3} + j \sin \frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Z_6 = 1\left(\cos \frac{0+2(5)\pi}{6} + j \sin \frac{0+2(5)\pi}{6}\right) = 1\left(\cos \frac{5\pi}{3} + j \sin \frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2}$$

مثال (4): جد كل الاعداد المركبة التي تحقق المعادلة $Z^2 = j4$ مع التمثيل بالرسم .

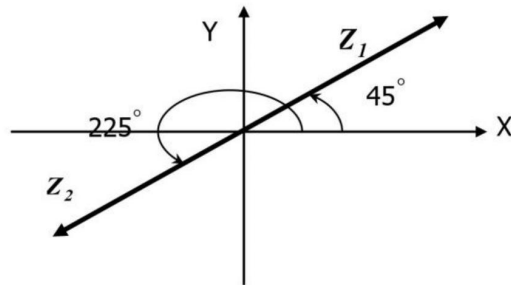
$$Z^2 = j4 \quad \Rightarrow \quad Z = \sqrt{j4} \quad \text{الحل:}$$

$$\therefore x=0, y=4 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{0+4^2} = 4, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{4}{0} = 90^\circ$$

$$\sqrt[n]{Z} = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{\theta + k360}{n} + j \sin \frac{\theta + k360}{n} \right], \quad n=2, \quad k=0, 1$$

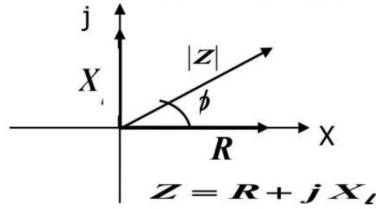
$$Z_1 = 2 \left[\cos \frac{90}{2} + j \sin \frac{90}{2} \right] = \frac{2}{\sqrt{2}} + j \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}(1 + j)$$

$$\begin{aligned} Z_2 &= 2 \left[\cos \frac{90+360(1)}{2} + j \sin \frac{90+360(1)}{2} \right] = 2(\cos 225 + j \sin 225) \\ &= \frac{-2}{\sqrt{2}} - j \frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}(1 + j) \end{aligned}$$



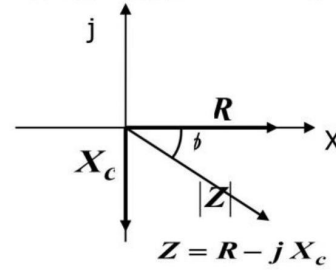
تطبيقات على الاعداد المركبة Applications of complex numbers

يمكن استخدام صيغة الاعداد المركبة للتعبير عن العناصر التالية في دوائر التيار الكهربائي المتناوب : المقاومة **R** , المحاثة **L** , inductance , والتمسعة **C** , capacitance حيث تمثل المقاومة على المحور الحقيقي الموجب (المحور **X**) , بينما تكون الممانعة الحثية **inductive reactance** التي يرمز لها X_L على الجزء الموجب من المحور الخيالي **j** (المحور **Y**) وذلك لكون الفولتية تتقدم على التيار في دائرة المحث بزاوية طور قدرها $\pi/2$. اما الممانعة السعوية **capacitive reactance** التي يرمز لها X_C فتكون على الجزء السالب من المحور الخيالي **j** (المحور **Y**) وذلك لكون الفولتية تتخلف على التيار في دائرة التمسعة بزاوية طور قدرها $\pi/2$. كما مبين في الشكل ادناه :



$$|Z| = \sqrt{R^2 + X_L^2}$$

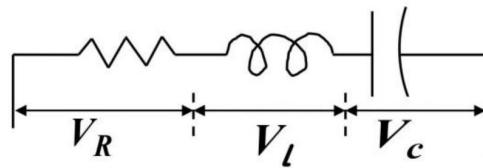
$$\phi = \tan^{-1} X_L / R$$



$$|Z| = \sqrt{R^2 + X_C^2}$$

$$\phi = \tan^{-1} X_C / R$$

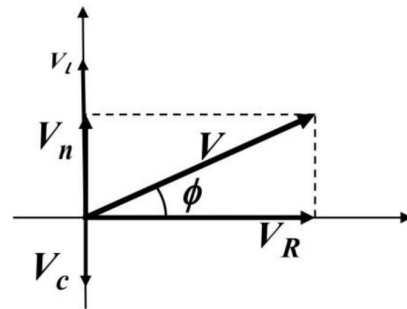
ان الممانعة المشتركة للمقاومة وكل من الممانعة الحثية والممانعة السعوية تسمى المعاوقة المركبة **Impedance** ويرمز لها **Z** اما القيمة العددية للمعاوقة فيرمز لها $|Z|$ في دائرة التيار المتناوب ذات الربط المتوالي والمتكونة من مقاومة وملف وتمسعة يكون التمثيل الاتجاهي للدائرة كما في الشكل ادناه :



$$V_n = V_L - V_C$$

$$V = V_R + jV_n$$

$$V_R = IR, \quad V_L = IX_L, \quad V_C = IX_C$$



ولكن : $\omega = 2\pi f$, $X_c = 1/2\pi f C$, $X_L = 2\pi f l$,
 حيث ان : V : الفولتية , I : التيار , l : الحث , C : المتسعة , f : التردد
 اذن : $X_c = 1/\omega C$, $X_L = \omega l$.

امثلة محلولة :

(1) جد المقاومة والمحاثة Inductance أو المتسعة Capacitance لكل من المعاوقات المركبة Impedances التالية , معتبراً قيمة التردد : $f = 50 \text{ Hz}$

a) $(4 + j7)\Omega$, b) $(-j20)\Omega$, c) $\sqrt{12} \angle -60^\circ \Omega$

الحل : اذن : Impedance $Z = 4 + j7 \Omega$ a)

Resistance = 4Ω and reactance = 7Ω

بما ان الجزء الخيالي اشارته موجبة اذن ال reactance هو ملف inductive :

$$X_L = 7 \Rightarrow X_L = 2\pi f l \Rightarrow \therefore l = \frac{X_L}{2\pi f}$$

$$l = \frac{7}{2\pi 50} = 0.0223 \text{ h} = 22.3 \text{ m h} \text{ ملي هنري}$$

b) Impedance $Z = -j20 \Omega$ اذن :

Resistance = 0Ω and reactance = 20Ω

بما ان الجزء الخيالي اشارته سالبة اذن ال reactance هو متسعة capacitive :

$$X_c = 20 \Rightarrow X_c = \frac{1}{2\pi f c} \Rightarrow \therefore c = \frac{1}{2\pi f X_c}$$

$$\therefore c = \frac{1}{2\pi 50 \times 20} \times 10^6 = 159.2 \mu F \text{ مايكرو فاراد}$$

c) Impedance $Z = \sqrt{12} \angle -60^\circ \Omega$ اذن :
 $Z = \sqrt{12} (\cos(-60^\circ) + j \sin(-60^\circ))$

$$Z = \sqrt{12} \left(\frac{1}{2} + j \frac{-\sqrt{3}}{2} \right) = \sqrt{3} - j3$$

Resistance = $\sqrt{3} \Omega$ and reactance = 3Ω

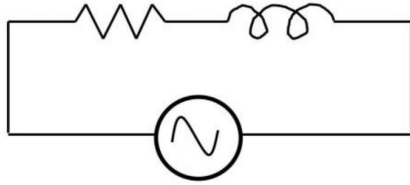
بما ان الجزء الخيالي اشارته سالبة اذن ال reactance هو متسعة capacitive :

$$X_c = 3 \Rightarrow X_c = \frac{1}{2\pi f c} \Rightarrow \therefore c = \frac{1}{2\pi f X_c}$$

$$\therefore c = \frac{1}{2\pi 50 \times 3} \times 10^6 = 1061.1 \mu F \quad \text{مايكرو فاراد}$$

(2) في دائرة التوالي الموضحة في الشكل فان : $R = 5 \Omega$, $L = 2 mH$, $v = 150 \sin 5000t$, أوجد المعاوقة المركبة بالصيغة المثلثية.

$$\therefore X_L = \omega L = 5000(2 \times 10^{-3}) = 10 \Omega \quad \text{الحل :}$$



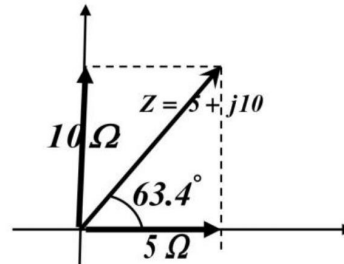
$$Z = R + jX_L$$

$$Z = 5 + j10 \Omega$$

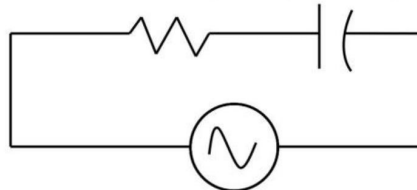
$$|Z| = \sqrt{5^2 + 10^2} = 11.16 \Omega \quad \text{ولايجاد المعاوقة بالصيغة المثلثية :}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{10}{5} = 63.4^\circ$$

$$\therefore Z = 11.16 \angle 63.4^\circ \Omega$$



(3) في دائرة التوالي الموضحة في الشكل فان : $R = 20 \Omega$, $C = 5 \mu F$, والفولتية $v = 150 \cos 10000t$, أوجد المعاوقة المركبة بالصيغة المثلثية.
الحل:



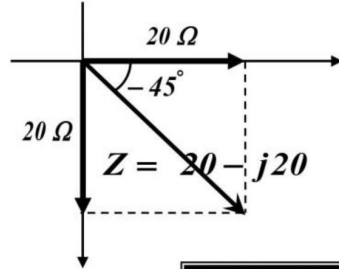
$$\therefore X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{10000(5 \times 10^{-6})} = 20 \Omega$$

$$Z = 20 - j20 \Omega$$

$$|Z| = \sqrt{20^2 + 20^2} = 28.3 \Omega \quad \text{ولايجاد المعاوقة بالصيغة المثلثية :}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{20}{-20} = -45^\circ$$

$$\therefore Z = 28.3 \angle -45^\circ \Omega$$



الدوال Functions

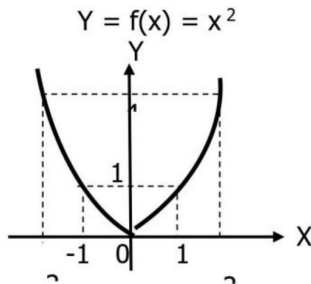
الدالة : هي مجموعة إحداثيات نقاط (x, y) بحيث أن لكل قيمة للمتغير الأول (المستقل x Independent) لا توجد إلا قيمة (صورة) واحدة فقط للمتغير الثاني (المعتمد y Dependent) , وتكتب هذه العلاقة بالصيغة التالية : $y = f(x)$

وتقرأ y هي دالة x , اي ان y تمثل قيمة الدالة (f) عند النقطة x , لنفرض ان لدينا الدالة : $y = f(x) = x^2$, وأن مجال تغير المتغير (x) هو مجموعة الارقام :

$(-2, -1, 0, 1, 2)$ فقط . وبموجب هذه الأرقام فإن قيم (y) التي تقابل قيم (x) هي على التوالي $(4, 1, 0, 1, 4)$, اي ان الدالة : $y = x^2$ هي عبارة عن الأزواج المرتبة التالية : $\{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$

وتكتب هذه الصيغة بالشكل التالي :

$$y = f(-2) = 4, \quad y = f(-1) = 1, \quad y = f(0) = 0, \quad y = f(1) = 1, \quad y = f(2) = 4$$



x	-2	-1	0	1	2
$y = f(x)$	4	1	0	1	4

منطلق الدالة (Domain) ويرمز له (D_F) .
مدى الدالة (Range) ويرمز له (R_F)

$$D_F = \{x : -2 \leq x \leq 2\} = [-2, 2]$$

$$R_F = \{y : 0 \leq y \leq 4\} = [0, 4]$$

ان مجموعة كل القيم الممكنة لـ x تسمى مجال (منطلق) الدالة Domain , وهي قيم x

التي تجعل المعادلة $y = f(x)$ معرفة , ويكتب منطلق الدالة على شكل فترة **مفتوحة** او **مغلقة** :

وتكون الفترة مغلقة $[a,b]$ عندما قيم x تكون $a \leq x \leq b$ وتعني الأقواس **المربعة** ان منطلق الدالة هو كل الاعداد الحقيقية بين a, b بالاضافة الى العددين a و b .
بينما الفترة المفتوحة (a,b) عندما قيم x تكون $a < x < b$ وتعني الأقواس **الدائرية** ان منطلق الدالة هو كل الاعداد الحقيقية بين a, b ما عدا العددين a و b فهما ليسا ضمن منطلق الدالة .

اما مجموعة القيم التي تتخذها الدالة للمتغير المعتمد y عندما تأخذ x جميع قيم المنطلق فتسمى مدى الدالة **Range** .

مثال : بين منطلق الدالة **domain** ومداهها **range** في كل من الدوال التالية , ثم احسب : $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$ لكل منها .

$$1) \quad y = f(x) = 3x + 1 \quad -2 \leq x \leq 5$$

$$f(-2) = 3(-2) + 1 = -5, \quad f(5) = 3(5) + 1 = 16$$

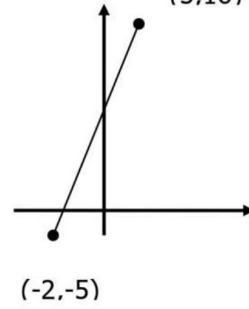
(5,16)

$$\text{Domain} = \{x : -2 \leq x \leq 5\} = [-2, 5]$$

$$\text{Range} = \{y : -5 \leq y \leq 16\} = [-5, 16]$$

$$f(-1) = 3(-1) + 1 = -2$$

$$f(0) = 3(0) + 1 = 1, \quad f(2) = 3(2) + 1 = 7$$



$$2) \quad y = f(x) = x^2 - 2 \quad -3 < x < 3$$

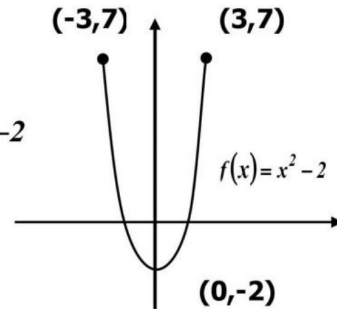
$$f(-3) = (-3)^2 - 2 = 7, \quad f(3) = (3)^2 - 2 = 7$$

$$\text{Domain} = \{x : -3 < x < 3\} = (-3, 3)$$

$$\text{Range} = \{y : -2 \leq y < 7\} = [-2, 7)$$

$$f(-1) = (-1)^2 - 2 = -1, \quad f(0) = (0)^2 - 2 = -2$$

$$f(2) = (2)^2 - 2 = 2$$



$$3) \quad y = f(x) = x^2 \quad x \geq -5$$

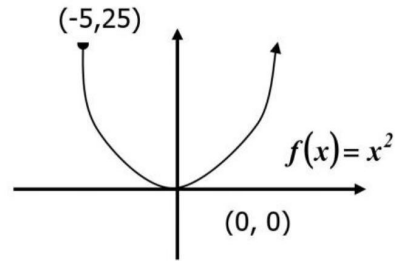
$$f(-5) = (-5)^2 = 25$$

$$\text{Domain} = \{x : x \geq -5\} = [-5, \infty)$$

$$\text{Range} = \{y : y \geq 0\} = [0, \infty)$$

$$f(-1) = (-1)^2 = 1$$

$$f(0) = (0)^2 = 0$$



$$f(2) = (2)^2 = 4$$

$$4) \quad y = f(x) = \frac{2}{2x-1}$$

يما ان الدالة كسرية , نستبعد قيم x التي تجعل المقام يساوي صفر من منطلق الدالة
 $2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0.5$

$$\text{Domain} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0.5\}$$

ثم نكتب الدالة بدلالة y ونستبعد القيم التي تجعل المقام يساوي صفر من مدى الدالة :

$$y = \frac{2}{2x-1} \Rightarrow x = \frac{2+y}{2y} \Rightarrow 2y = 0 \Rightarrow \therefore y = 0$$

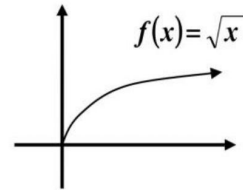
$$\text{Range} = \{y \in \mathbb{R} : y \neq 0\}$$

$$f(-1) = \frac{2}{2(-1)-1} = \frac{-2}{3} \quad f(0) = \frac{2}{2(0)-1} = -2 \quad f(2) = \frac{2}{2(2)-1} = \frac{2}{3}$$

$$5) \quad y = f(x) = \sqrt{x} \quad x \geq 0$$

$$\text{Domain } y = f(x) = \frac{2}{2x-1} : [0, \infty)$$

$$\text{Range } y = f(x) = \frac{2}{2x-1} : [0, \infty)$$



$$f(-1) = \sqrt{-1} \text{ قيمة غير معرفة وهي خارج منطلق الدالة}$$

$$f(0) = \sqrt{0} = 0 \quad , \quad f(2) = \sqrt{2} = 1.414$$

رابعاً : الاختبار البعدي

ضع دائرة حول الاجابة الصحيحة لكل مما ياتي :

١ - جد كل الاعداد المركبة التي تحقق المعادلة $Z^2 = j4$ مع التمثيل بالرسم.

(a) $-\sqrt{2} (1 + j)$

(b) $(1 + j)$

(c) $(-1 + j)$

٢ - جد الجدور الثلاثة للعدد المركب $Z = -1 + j$ مع التمثيل بالرسم

(a) $Z1 = \cos(-16) + j \sin(-15)$, $Z2 = \cos(-44)$, $Z3 = \cos(225)$

(b) $Z1 = 2^{1/6} \cos(-15) + j \sin(-15)$, $Z2 = 2^{1/6} \cos(105) + j \sin(-15)$,

$Z3 = 2^{1/6} \cos(225) + j \sin(225)$

مفاتيح الاجابة على الاختبارات

الاختبار البعدي		الاختبار القبلي	
الاجابة الصحيحة	رقم السؤال	الاجابة الصحيحة	رقم السؤال
A	١	A	١
B	٢	B	٢
		A	٣

المصادر الاساسية :

Monaghan, J., Ely, R., Pinto, M. M., & Thomas, M. (2023). *The learning and teaching of Calculus: ideas, insights and activities*. Taylor & Francis.

[20191008_080722_640.pdf \(uoninevah.edu.iq\)](https://uoninevah.edu.iq/20191008_080722_640.pdf)

خارطة القياس المعتمدة

عدد الفقرات	الأهداف السلوكية					الأهمية النسبية	عناوين الفصول	المحتوى التعليمي	
	التقييم	التحليل	التطبيق	الفهم	المعرفة				
									النسبة
٥	٢٠ %	١٠ %	١٠ %	٢٥ %	٣٥ %		١٠٠ %	اسس الرياضيات	الفصل الاول