الحقيبة التعليمية

المرحلة الأولى

قسم التقنيات الميكانيكية

الرياضيات

الدكتور

غسان جاسم هادي

الرياضيات التطبيقية

✯المصفوفات والمحددات Matrixes and determinants✯

المصفوفة :المصفوفة هي عبارة عن مجموعة من الأعداد مرتبة على شكل مستطيل . وسنفرض جميع المدخلات في المصفوفة على أنها تنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية والمعقدة
يُرمز للمصفوفة بالرموز A,B,C,..... ومُدخلات المصفوفة بالرمز a_{ij} :

$$A = [a_{ij}] = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ . & & & . \\ . & & & \\ a_{m1} & \cdots\cdots & \cdots\cdots & a_{mn} \end{vmatrix}_{m*n}$$

المصفوفة مدخلات المصفوفة

حيث: m ← صف
n ← عمود

الصف Row ⟶ i= 1,2,3,…..m
العمود Column ⟶ j= 1,2,3,…..n

تسمى المصفوفة مربعة اذا كانت المصفوفة A من السعة m*n واذا كان m=n (أي ان عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة)

✎ **Example:(1)**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3*3}$$

♧أنواع المصفوفات Diagonal Matrix (المصفوفة القطرية)

المصفوفة القطرية: تسمى المصفوفة قطرية عندما جميع عناصر قطرها متساوية ولها قيمة ثابتة (Constant (C حيث ان aij=c لكل i=j

✎ **Example:(2)**

القطر الرئيسي

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{4*4}$$

القطر الثانوي

المصفوفة الصفرية: Zero Matrix أو Null Matrix
وهي المصفوفة التي يكون جميع مدخلاتها أصفار

✎ **Example :(3)**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3*3}$$

المصفوفة الوحدة : Identity Matrix

هي المصفوفة التي يكون جميع عناصر قطرها الرئيسي واحد والباقي اصفار . ونرمز لها بالرمز I .

✎**Example:(4)**

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2*2} \quad ; \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3*3}$$

المصفوفة المثلثية : Triangular Matrix

i- المصفوفة المثلثية العليا :وهي المصفوفة التي تكون جميع المدخلات الواقعة تحت القطر الرئيسي تكون أصفار .

✎**Example:(5)**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}_{3*3} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2*2}$$

ii- المصفوفة المثلثية السفلى :وهي المصفوفة التي تكون جميع مدخلاتها فوق القطر الرئيسي أصفار .

✎**Example:(6)**

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}_{3*3}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{2*2}$$

مُدور المصفوفة : Transpose of Matrix

وهي تغيير أعمدة المصفوفة بدل صفوفها أو تغيير الصفوف بدل الأعمدة

✎**Example:(7)**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}_{2*3} \quad ; \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}_{3*2}$$

المصفوفة المنفردة :

هي المصفوفة التي تكون قيمة محددها يساوي صفر ، مثال تمرين (15) .

المصفوفة غير المنفردة :

هي المصفوفة التي تكون قيمة محددها لا تساوي صفر($\neq 0$)

Example: (8)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}_{2*2}$$

قيمة المحدد $|A| = 2*5 - 1*4 = 10 - 4$

$$\therefore |A| = 6$$

ان هذه المصفوفة غير منفردة لان قيمة محددها (6) أي لا يساوي صفر

Example: (9)

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}_{2*2}$$

; $|B| = 3*4 - 2*6$

$= 12 - 12 = 0$

المصفوفة منفردة لان قيمة محددها يساوي صفر

طريقة إيجاد قيمة المحدد لمصفوفة من السعة 2*2:

القطر الرئيسي ↘ ↙ القطر الثانوي

$$D_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

نوجد قيمة المحدد كما يلي : حاصل ضرب القطر الأول الرئيسي مطروحاً منه حاصل ضرب القطر الثانوي

$$\therefore D_2 = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

D_2 يسمى محدداً من الدرجة الثانية

المحددات للمصفوفات : Determinants

القيمة العددية للمصفوفات

المحدد :هي مجموعة عناصرها تكتب على شكل صفوف وأعمدة رباعي الشكل ويكون محصور بين مستقيمين شاقوليين ويرمز له بالرمز |A| أو det. A أو D

✎**Example:(10)** Find the value of the following determinant

جد قيمة ما يلي للمحددات :

$$A=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & 6\end{bmatrix}$$

سالب موجب

$$|A|=3*6-2*4$$
$$=18-8=10$$

أي إن القطر المتجه نحو اليمين (القطر الرئيسي) يكون موجب بينما يكون القطر المتجه نحو اليسار (القطر الثانوي) سالب

☜ **مثال: جد قيمة X إذا كان**

$$A=\begin{bmatrix}X & 4\\ 1 & X\end{bmatrix}=0$$

الحل:

Solution :

$$X^2-4=0$$
$$\therefore X^2=4$$
$$\therefore X=\pm 2$$

☺ بعض العمليات الجبرية على المصفوفات:

الجمع والطرح Addition and subtraction

$$A=\begin{bmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{bmatrix}_{2*2} \qquad B=\begin{bmatrix}b_1 & b_2\\ b_3 & b_4\end{bmatrix}_{2*2}$$

$$A+B=\begin{bmatrix}a_1+b_1 & a_2+b_2\\ a_3+b_3 & a_4+b_4\end{bmatrix}_{2*2}$$

$$A-B=\begin{bmatrix}a_1-b_1 & a_2-b_2\\ a_3-b_3 & a_4-b_4\end{bmatrix}_{2*2}$$

ضرب المصفوفة * ثابت by constant

✎**Example:(11)** Let

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\end{bmatrix} \quad \text{And } C=3 \quad \text{Find } C_*A$$

الحل:

Solution :

$$C.A=3\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3*1 & 3*3\\ 3*2 & 3*0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 9\\ 6 & 0\end{bmatrix}=0-54=-54$$

✎ **Example:(12)** Find $|2*A|+|3*B|$ IF :

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix} \quad ، \quad B=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

Solution : **الحل:**

$$|2*A|=2*\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 0 & 6\end{bmatrix}=12-0=12$$

$$|3*B|=3*\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -6\\ 3 & 9\end{bmatrix}=0-(-6*3)=18$$

$$\therefore |2*A|+|3*B|=12+18=30$$

❦إيجاد المحددات لمصفوفة من السعة 3*3:

هناك عدة طرق لإيجاد المحددات من السعة 3*3

الطريقة الأولى : الطريقة الخاصة أو طريقة التدوير (Rotate)

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}_{3*3}$$

$$|A|=\left|\begin{matrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{matrix}\right|\begin{matrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{matrix}\Bigg|$$

وتطبق هذه الطريقة حسب الخطوات التالية :

نكرر كتابة العمودين الأول والثاني بالترتيب إلى يمين المحدد

إيجاد المجموع الجبري لنتائج ضرب عناصر الأقطار الموجبة والسالبة كما هو مبين في الأسهم (أعلاه) وكما يلي :

$$|A|=(a_{11})(a_{22})(a_{33})+(a_{12})(a_{23})(a_{31})+(a_{13})(a_{21})(a_{32})$$
$$-(a_{13})(a_{22})(a_{31})-(a_{11})(a_{23})(a_{32})-(a_{12})(a_{21})(a_{33})$$

الطريقة الثانية(طريقة التجزئة)

لإيجاد قيمة المحدد يجب ملاحظة قانون الإشارات أو (قاعدة الإشارات) المبينة أدناه للعناصر داخل المحدد بغض النظر عن إشارة العنصر نفسه

يُفتح المحدد بستة طرق وكالاتي :

باستخدام الصف الأول

باستخدام الصف الثاني

باستخدام الصف الثالث

باستخدام العمود الأول

باستخدام العمود الثاني

باستخدام العمود الثالث

✯ملاحظة✯:تكون إشارة العنصر الأول في الصف الأول والعمود الأول ثابتة في حين تكون بقية العناصر فيما يتعلق بالصف الأول والعمود الأول مخالفة للعنصر الذي يسبقها بالإشارة.

✺قاعدة الإشارات✺

	العمود الاول	العمود الثاني	العمود الثالث	
الصف الأول R1	+	-	+	$(-1)^{i+j}$ i= رقم الصف j= رقم العمود
الصف الثاني R2	-	+	-	
الصف الثالث R3	+	-	+	

Ex: $(-1)^{1+1} = (-1)^{2} = +1$

✎**Example:(13)** Find the value of the det .A

جد قيمة المحدد التالي

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix}_{3*3}$$

الحل:

Solution :

$$|A| = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -4 & 5 & 6 & -4 & 5 \\ 7 & -8 & 9 & 7 & -8 \end{array}\right]$$

$$|A| = (1)*(5)*(9) + (2)*(6)*(7) + (3)*(-4)*(-8)$$
$$-(3)*(5)*(7) - (1)*(6)*(-8) - (2)*(-4)*(9)$$
$$= 45 + 84 + 96 - 105 + 48 + 72$$
$$\therefore |A| = 240$$

✎**Example:(14)** Find the value of the det .A

جد قيمة المحدد التالي

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -5 & 4 \\ 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{3*3}$$

Solution : **الحل:**

$$|A| = \begin{bmatrix} -2 & -5 & 4 \\ 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = (2*0*-1)+(-5*7*0)+(4*2*1)-(4*0*0)-(-2*7*1)-(-5*2*-1)$$

$$\therefore |A| = 0+0+8-0+14-10$$

$$\therefore |A| = 12$$

Example:(15) Find the value of the det .A

جد قيمة المحدد التالي بطريقة التجزئة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & -1 & 6 \\ 3 & -6 & 7 \end{bmatrix}$$

الحل بالنسبة للصف الأول :

$$|A| = 2\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -6 & 7 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} + (-4)\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 2(-7+36)-3(35-18)-4(-30+3)$$

$$|A| = 2(29)-3(17)-4(-27)$$

$$|A| = 58-51+108 = 115$$

الحل بالنسبة للصف الثاني :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & -1 & 6 \\ 3 & -6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -5\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 7 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -5(21-24)-(14+12)-6(-12-9)$$

$$|A| = 15-26+126 = 115$$

وبنفس الطريقة يمكن إيجاد قيمة المحدد

Example:(16) Find the value of the det .A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

الحل: **Solution** :

$$|A| = 1*\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - 1*\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + 2*\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -1 - 1 + 4 = 2$$

ملاحظة :

ان طريقة تفيد في حل المحددات من الدرجة الرابعة والخامسة . وبذلك يمكن دمج الطريقتين : طريقة التجزئة مع الطريقة الخاصة (طريقة التدوير) لحل محدد من الدرجة الرابعة .

1- المعادلات الخطية :

Example(1): *Solve the linear equations*

مثال : حل النظام الخطي بعدة طرق

$$x + y = 4 \qquad \cdots(1)$$
$$3x - 2y = 2 \qquad \cdots(2)$$

الطريقة الأولى : طريقة الحذف وكما يلي :

نضرب المعادلة (1) *3 والمعادلة (2) *1- ينتج :

$$3x + 3y = 12 \qquad \cdots(1)$$
$$-3x + 2y = -2$$

بالجمع

$$5y = 10 \quad \Rightarrow y = \frac{10}{5} = 2$$

$$\therefore y = 2$$

نعوض عن قيمة y في المعادلة ينتج :

$$\therefore y = 2$$
$$x = 2 \quad , \quad y = 2$$

الحل باستخدام المصفوفة

$$\begin{matrix} R_1 \rightarrow \\ R_2 \rightarrow \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}_{2*2} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{2*1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}_{2*1}$$

نضرب الصف الأول *3

$$\begin{matrix} R_1 \rightarrow \\ R_2 \rightarrow \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}_{2*2} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{2*1} = \begin{bmatrix} 12 \\ 2 \end{bmatrix}_{2*1}$$

بطرح الصف الثاني من الصف الأول

$$R_1 - R_2 \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \therefore 5y = 10 \quad \Rightarrow \therefore y = 2$$

$$\therefore x = 2$$

حل النظام هو x=2
Y=2

♚نظرية أو قاعدة كَرامر Gramer's Rule♚

لتكن AX=B نظام من المعادلات الخطية التي رتبتها n*n وتحتوي على n من المجاهيل بحيث ان محددها |A|≠0 عندئذ يكون للنظام حل وحيد أي ان :

$$X1=\frac{|A_1|}{|A|} \quad , X_2=\frac{|A_2|}{|A|} \quad ,\ldots\ldots\ldots,Xn=\frac{|An|}{|A|}$$

✎**Example(2): Find the solution of x,y by using Gramer's Rule**

استخدم قاعدة كَرامر لحل نظام المعادلات :

$$2x-3y=8 \qquad \cdots(1)$$
$$3x+y=1 \qquad \cdots(2)$$

Solution : **الحل:**

اجعل النظام بشكل صيغة مصفوفة

$$\begin{bmatrix}2 & -3\\ 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\ 1\end{bmatrix}$$

*** نستخرج المحدد الأصلي للمصفوفة** (D)

$$D=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 3 & 1\end{vmatrix}=(2*1)-(-3*3)$$
$$=2+9=11$$

$$D_1=\begin{vmatrix}8 & -3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=(8*1)-(-3*1)$$
$$=8+3=11$$

نستخرج المحدد (D_2) وذلك بحذف العمود الثاني والتعويض عنه بالعمود الثالث (عمود الحدود المطلقة) وكمايلي :

$$D_2=\begin{vmatrix}2 & 8\\ 3 & 1\end{vmatrix} \Rightarrow D_2=2-24$$

$$\therefore D_2=-22$$

$$X=\frac{|D_1|}{|D|}=\frac{11}{11}=1$$

$$y=\frac{|D_2|}{|D|}=\frac{-22}{11}=-2$$

$$\therefore x=1 \quad , \quad y=-2$$

التحقيق ☻ Proof:

نعوض عن قيم x,y في المعادلتين أعلاه ينتج

$$2+1-3(-2)=8$$
$$2+6=8$$
$$8=8$$

☜ مثال (3): استخدام قاعدة كَرامر لحل المعادلات الخطية

$$x - y = 1$$
$$x - z = 3$$
$$y + z = 8$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{D_1}{D} \quad , \; y = \frac{D_2}{D} \quad , z = \frac{D_3}{D}$$

$$D = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} a$$

$$D = 1\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1(\ 0+1) + 1(\ 1) + 0 = 1 + 1 = 2$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 8 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1(\ 1) + (\ 3+8) + 0 = 1 + 11 = 12$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= 1(\ 3+8) - 1(\ 1) = 11 - 1 = 10$$

$$\therefore D_2 = 10$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$=1\begin{bmatrix}0 & 3\\ 1 & 8\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 8\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=1(\ 0-3)+1(\ 8)+1(\ 1)$$
$$=-3+8+1=6$$

$$X=\frac{D_1}{D}=\frac{12}{2}=6\ \ ,\ y=\frac{D_2}{D}=\frac{10}{2}=5\ \ ,z=\frac{D_3}{D}=\frac{6}{2}=3$$

✎**<u>Example</u>**(4): **Find the solution of x,y,z by using Gramer's Rule**

(استخدم قاعدة كَريمر لايجاد قيم x,y,z)

$4x+y+z=5$ .....(1)

$3x+y+4z=10$ .....(2)

$x+y+z=2$ .....(3)

<u>Solution</u> : **الحل:**

$$\begin{bmatrix}4 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 4\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ 10\\ 2\end{bmatrix}$$

$$D=\begin{vmatrix}4 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 4\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}\begin{matrix}4 & 1\\ 3 & 1\\ 1 & 1\end{matrix}$$

$$D=4+4+3-1-16-3=-9\ \ \Rightarrow\therefore D=-9$$

$$D_1=\begin{vmatrix}5 & 1 & 1\\ 10 & 1 & 4\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}\begin{matrix}5 & 1\\ 10 & 1\\ 2 & 1\end{matrix}$$

$$D_1=5+8+10-2-20-10=-9\ \ \Rightarrow\therefore D_1=-9$$

$$D_2=\begin{vmatrix}4 & 5 & 1\\ 3 & 10 & 4\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}\begin{matrix}4 & 5\\ 3 & 10\\ 1 & 2\end{matrix}$$

$$D_2=40+20+6-10-32-15\Rightarrow\therefore D_2=9$$

$$D_3=\begin{vmatrix}4 & 1 & 5\\ 3 & 1 & 10\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}\begin{matrix}4 & 1\\ 3 & 1\\ 1 & 1\end{matrix}$$

$$\therefore X=\frac{D_1}{D}=\frac{-9}{-9}=1\ \ ,\ y=\frac{D_2}{D}=\frac{9}{-9}=-1\ \ ,z=\frac{D_3}{D}=\frac{-18}{-9}=2$$

✎**Example(5): Find the value of x**

جد قيمة x

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2x^2 & -x & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 0$$

Solution : **الحل:**

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2x^2 & -x & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2x^2 & -x \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$4x - 1 + 4x^2 - 2x - 4 + 2x^2 = 0$$

$$6x^2 + 2x - 5 = 0$$

a b c

* المعادلة الناتجة هي معادلة من الدرجة الثانية لذلك نستخدم طريقة الدستور لحل هذه المعادلة

قانون الدستور

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

حيث : a=6 , b=2 ,c=-5

$$\therefore x = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(6)(-5)}}{2(6)}$$

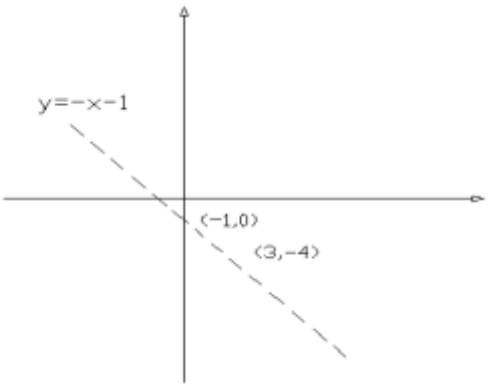
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 120}}{12} = \frac{-2 \pm \sqrt{124}}{12}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 * 31}}{12} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{31}}{12} = \frac{-1 \pm \sqrt{31}}{6}$$

$$\therefore \text{if } x = \frac{-1 - \sqrt{31}}{6} \text{ or } x = \frac{-1 + \sqrt{31}}{6}$$

☜ **مثال(6) :اثبت ان حل المحدد التالي هو عبارة عن معادلة خط مستقيم يمر بالنقاط (-1,0), (3,- 4) مع الرسم ؟**

x	y
0	−1
1	−2
−1	0



$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

الحل:

Solution :

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ 3 & -4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$-4x - y + 0 - 4 - 0 - 3y = 0$$
$$-4x - 4y - 4 = 0$$

بالقسمة على 4 – ينتج :

معادلة المستقيم ⟵ $x + y + 1 = 0$

نعوض في النقاط (-1,0) ينتج :

$$(-1,0) \Rightarrow -1 + 0 + 1 = 0$$

النقطة **(3,- 4), ينتج :**

$$(3, -4) \Rightarrow 3 - 4 + 1 = 0$$

تمارين تطبيقية :-

1) $3x+3y=2$

$6x+3y=1 \qquad \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$

$y=1$

---

2) $3x-y=2$

$3x-2y=5 \qquad \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$

$y=-3$

---

3) $3x+4y=11$

$-x+2y=3 \qquad \Rightarrow x=1$

$y=2$

---

4) $3x=5+y$

$-x=2-4y \qquad \Rightarrow x=2$

$y=1$

---

5) if $A=\begin{bmatrix}5 & y\\ 3 & 2\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}5 & 0\\ x^2-1 & 2\end{bmatrix}$

andif$[A]=[B]$ Find the value of x andy

---

6) find the value of k by det.

$\begin{bmatrix}2k & 1\\ 8 & 1\end{bmatrix}=0 \qquad \begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 3 & k\end{vmatrix}$

---

7) if $A=\begin{bmatrix}8 & 4\\ 5 & y\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}x^2-1 & 4\\ 5 & 0\end{bmatrix}$

andif$[A]=[B]$ Find the value of x andy

---

8) Find the value of a,b,c if

$$\begin{bmatrix}5b+1 & 0\\ 3c & 8\\ -3 & 2a+b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 0\\ 9 & 8\\ -3 & 3\end{bmatrix}$$

---

9) $\begin{bmatrix} x^2 & x & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & -3 & 1 \end{bmatrix} = 0$ Find the value of x and

proof has roots $x = 2$, $x = -3$

---

10) Find the determint of order A,B

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = 6 \qquad \Rightarrow |B| = -2$$

---

11) $x = 1 - y - 2z$ $\qquad x = \frac{1}{2}$ By Gramer's Rule

$2x - y - z = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{2}$

$x + 2y = 4 + z \qquad z = -\frac{1}{2}$

---

12) Find the value of x,y,z by Gramer's Rule

$2x + y - z = 0 \qquad x = 2$

$x + z - y = 6 \quad \Rightarrow \quad y = -1$

$x + 2y + z = 3 \qquad z = 3$

---

13) $2x + y - z = 2 \qquad x = 3$

$x - y + z = 7 \quad \Rightarrow \quad y = -1$

$x + 2y + z = 4 \qquad z = 3$

استخدم المحدد الرباعي لايجاد قيمة t,z,y,x باستخدام قاعدة كَرامر

14) $2x + 3t - y = -3$

$t + 2z + x - 3 = 0$

$3y - 3z + 2t = -13 \quad \Rightarrow |A| = 105$

$4x + 3y + 2z = 5 \quad \Rightarrow |A_1| = 105$

$\Rightarrow |A_2| = 105$

---

15) $2x - y + z = 4$

$x + 3y + 2z = 12 \quad \Rightarrow |A| = 0$

$3z + 2y + 3x = 16$

---

16) $3x+5y=1-z$ $\qquad x=\frac{3}{5}$

$4x+y=2+z \quad \Rightarrow \quad y=-\frac{1}{5}$

$5x-y=3+z \qquad z=\frac{1}{5}$

---

17) $x_1+x_2+x_3=4 \qquad x_1=5$

$2x_3+3x_2+2x_1=5 \quad \Rightarrow \quad x_2=-3$

$3x_1+4x_2-3x_3=-3 \qquad x_3=2$

---

18) $x=2+y$

$2y=x-z+1$

$2z=-2-y$

---

19) $3x+2y-z=4 \qquad x=1$

$-x+4y+z=10 \quad \Rightarrow \quad y=2$

$x+y+z=6 \qquad z=3$

أوجد قيمة المحدد الثلاثي باستخدام طريقة التجزئة

20)

$$A=\begin{bmatrix}7 & 3 & 2\\ 5 & 0 & 1\\ -2 & 4 & 2\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}-3 & -4 & 2\\ 0 & 1 & 5\\ 4 & 3 & 2\end{bmatrix}$$

$|A|=-24 \qquad |B|=-49$

---

21) i) $x+2z=1$

$y=-z-1$

$x=-y+z+2$

ii) $2x+y-z=4$

$y+z=5$

$x-2y=1$

أوجد قيمة المحدد الثلاثي باستخدام طريقة التجزئة والتدوير

22)

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 5\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 5\\ -2 & 1 & 4\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

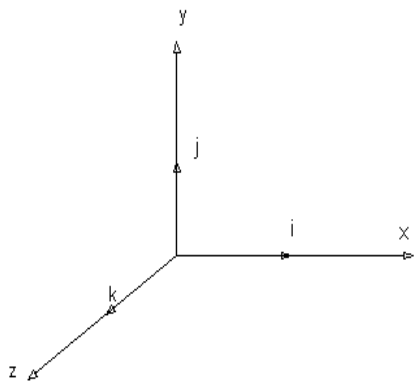
$|A|=13 \qquad |B|=-42$

♣المتجهات والقيم العددية : Vectors and Scalars♣

تسمى الكميات التي لها مقدار عددي وليس لها اتجاه بالقيم العددية (وتكون غير اتجاهيه) مثل الطول ، الزمن ،درجة الحرارة ، المساحة .... الخ.
أما الكميات التي لها مقدار عددي واتجاه تسمى بالمتجهات Vectors مثل القوة $\vec{F}$ (Force) والسرعة $\vec{V}$ (Velocity) والتعجيل $\vec{a}$ (acceleration)

ويرمز للمتجهات بالرموز .....,$\vec{V}$,$\vec{C}$,$\vec{B}$,$\vec{A}$ ولكل متجه ثلاثة متغيرات هي k,j,i ويكتب

$$\vec{A} = a_1 i + a_2 j + a_3 k$$



✎ **Example:**

$\vec{A} = 1i + 2j + 3k$

حيث ان a_3, a_2, a_1 هي قيم معلومة كما في المثال اعلاه .

♠♠العمليات الجبرية على المتجهات♠♠ :

الجمع والطرح .
ضرب المتجه في عدد ثابت.
إيجاد طول المتجه.
أيجاد متجه الوحدة العمودي $\vec{u}$ لمتجه واحد.
إيجاد قيمة الضرب الديكارتي (x) Cros.
إيجاد قيمة متجه الوحدة العمودي $\vec{u}$ بين متجهين $\vec{u}(\vec{A},\vec{B})$.
إيجاد قيمة الزاوية (θ) بواسطة استخدام قانون Sin
إيجاد الضرب العددي (Dot) وإيجاد الزاوية (θ) بواسطة Cos

✎ **Example:**

ليكن $\vec{A},\vec{B}$ متجهين هما

$\vec{A} = 2i + 3j + 4k$

$\vec{B} = i + j + k$

أوجد 1- $\vec{A}+\vec{B}$ 2- $\vec{A}-\vec{B}$ 3- $3\vec{B},5\vec{A}$ 4- $|\vec{B}|,|\vec{A}|$ 5- $\vec{u}(\vec{A})$,$\vec{u}(\vec{B})$

6- $\vec{A}x\vec{B}$ 7- $|\vec{A}\times\vec{B}|$ 8- $\vec{u}(\vec{A},\vec{B})$ 9- $\theta\angle(\vec{A},\vec{B})$ 10- $\vec{A}.\vec{B}$

1- $\vec{A}+\vec{B}$

$$\vec{A}=2i+3j+4k$$
$$\vec{B}=i+j+k$$
$$\vec{A}+\vec{B}=3i+4j+5k$$

2- $\vec{A}-\vec{B}$

$$\vec{A}=2i+3j+4k$$
$$\vec{B}=i+j+k$$
$$\vec{A}-\vec{B}=1i+2j+3k$$

3- * صيغة القانون

$$\vec{A}=a_1i+a_2j+a_3k$$
$$\vec{B}=b_1i+b_2j+b_3k$$
$$\vec{A}\pm\vec{B}=(a_1+b_1)i+(a_2+b_2)j+(a_3+b_3)k$$

3-

$$5\vec{A}=(5x_2)i+(5x_3)j+(5*4)k$$
$$=10i+15j+20k$$
$$3\vec{B}=3i+3j+3k$$

---

* صيغة القانون (C) هو عدد ثابت (constant) $c\vec{A}=ca_1i+ca_2j+ca_3k$

4-

$$|\vec{A}|=\sqrt{2^2+3^2+4^2}$$
$$=\sqrt{4+9+16}=\sqrt{29}=5.385$$
$$|\vec{B}|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}=1.732$$

---

* صيغة القانون : $|\vec{A}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

دائماً الطول للمتجه يكون موجب اذا كان أي قيمه (-)لأن $(-)^2=+$

5- $\vec{u}(\vec{A}) = \dfrac{2i+3j+4k}{\sqrt{29}}$

$$\vec{u}(A) = \frac{2}{\sqrt{29}}i + \frac{3}{\sqrt{29}}j + \frac{4}{\sqrt{29}}k$$

$$\vec{u}(\vec{B}) = \frac{i+j+k}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}i + \frac{1}{\sqrt{3}}j + \frac{1}{\sqrt{3}}k$$

✵متجه الوحدة

*** صيغة القانون :**

$$\vec{u} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{a_1 i + a_2 j + a_3 k}{|\vec{A}|}$$

$$= \frac{a_1}{|A|}i + \frac{a_2}{|A|}j + \frac{a_3}{|A|}k$$

❀الضرب بطريقة (cros)

لحل هذا المحدد نستخدم طريقة التجزئة

6 - $\vec{A} x \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$$\vec{A} x \vec{B} = i\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= i(3-4) - j(2-4) + k(2-3)$$

$$= -i + 2j - k$$

7- $|\vec{A} x \vec{B}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$

❀ صيغة القانون :

$$\vec{A} x \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

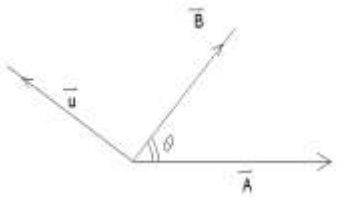
$$= i\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= i(a_2 b_3 - a_3 b_2) - j(a_1 b_3 - a_3 b_1) + k(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

8- $\vec{u}(\vec{A},\vec{B}) = \frac{A x B}{|A x B|}$

$$\vec{u}(\vec{A},\vec{B}) = \frac{-i+2j-k}{\sqrt{6}}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{6}}i + \frac{2}{\sqrt{6}}j - \frac{1}{\sqrt{6}}k$$



9- $\theta \angle \vec{A},\vec{B})$ **لاستخراج الزاوية θ حسب قانون الضرب ألاتجاهي (الديكارتي)**

$$|\vec{A} x \vec{B}| = |\vec{A}| x |\vec{B}|.\sin\theta$$

$$\sqrt{6} = \sqrt{29} x \sqrt{3}.\sin\theta$$

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{29} x \sqrt{3}} = \sin\theta$$

$$\sin^{-1}.\sin\theta = \sin^{-1}(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{29} x \sqrt{3}})$$

$$\therefore \theta = \sin^{-1}(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{29} x \sqrt{3}}) = \sin^{-1}(\frac{2.449}{9.327})$$

$$= \sin^{-1}(0.2626)$$

$$\theta = 15^{\circ}.22$$

10- $\vec{A}.\vec{B}$ **الضرب العددي : أي يكون الناتج دائماً عبارة عن عدد (Dot)**

$$\vec{A} = 2i + 3j + 4k$$

$$\vec{B} = i + j + k$$

$$\vec{A}.\vec{B} = (2x1) + (3x1) + (4x1)$$

$$= 2 + 3 + 4 = 9$$

$$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}| x |\vec{B}|.Cos\theta$$

$$9 = \sqrt{29} x \sqrt{3}.Cos\theta$$

$$Cos\theta = (\frac{9}{\sqrt{29} x \sqrt{3}})$$

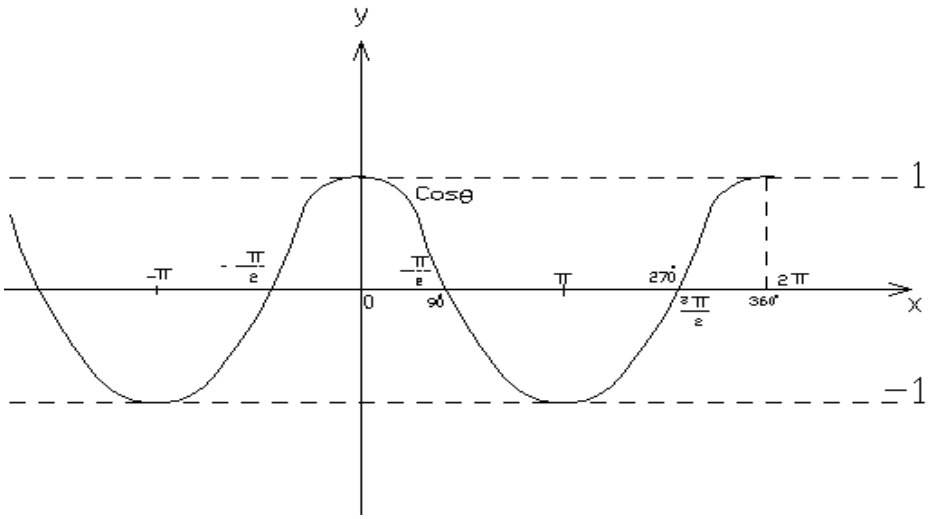
لإيجاد قيمة الزاوية θ من صيغة $\vec{A}.\vec{B}$ نستخدم القانون

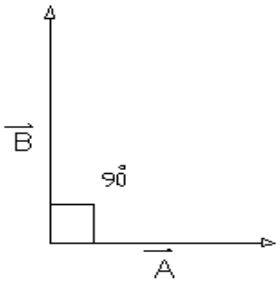
$$\therefore Cos^{-1}.Cos\theta = Cos^{-1}(\frac{9}{\sqrt{29} x \sqrt{3}})$$

$$\theta = Cos^{-1}(\frac{9}{\sqrt{29} x \sqrt{3}}) = Cos^{-1}(\frac{9}{9.327})$$

$$\therefore \theta = Cos^{-1}(0.965) = 15^{\circ} \cdot 22$$

✯إذا كان المتجهين $\vec{A},\vec{B}$ متعامدين فان الزاوية تكون 90° وتكون قيمة $Cos(90^{\circ}) = 0$





✎ Example:

$\vec{A} = i + j + k$

$\vec{B} = 2i - j - k$

$\vec{C} = 2i + 3j + 5k$

Find:

1- $\vec{A} + \vec{B}$ 2- $|2\vec{A} - 3\vec{C}|$ 3- $|\vec{A} \times \vec{B}|$ 4- $\vec{A}.\vec{B}$ 5- $\theta \angle \vec{A},\vec{B})$ 6- $\vec{u}(A,B)$

Or أثبت إن المتجهين متعامدان.

1- $\vec{A} + \vec{B}$

$\vec{A} + \vec{B} = 3i + (1-1)\ j + (1-1)\ k$

$= 3i + 0 \cdot j + 0 \cdot k$

$= 3i$

2- $2\vec{A} - 3\vec{C}$

$2\vec{A} = 2i + 2j + 2k$

$-3\vec{C} = -6i \mp 9j \mp 15k$

$2\vec{A} - 3\vec{C} = -4i - 7j - 13k$

$|2\vec{A} - 3\vec{C}| = \sqrt{4^2 + 7^2 + 13^2} = \sqrt{16 + 49 + 169} = \sqrt{234}$

3- $|\vec{A} \times \vec{B}|$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} + & - & + \\ i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= i\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= i(-1+1) - j(-1-2) + k(-1-2)$$

$$= 0 \cdot i + 3j - 3k$$

$$\left|\vec{A}.x\vec{B}\right| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$$

$\theta \frown AxB)$

$$\left|\vec{A}\,x\vec{B}\right| = \left|\vec{A}\right| x \left|\vec{B}\right|.\mathrm{Sin}\theta$$

$$3\sqrt{2} = \sqrt{3}\,x\sqrt{6}.\mathrm{Sun}\theta$$

$$\mathrm{Sin}\theta = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}\,x\sqrt{2}\,x\sqrt{3}} = 1$$

$$\mathrm{Sin}\theta = 1$$

$$\therefore \theta = 90^\circ$$

4- $\vec{A}.\vec{B}$ **الضرب العددي (النقطي)** Dot

$$\vec{A} = i + j + k$$

$$\vec{B} = 2i - j - k$$

$$\vec{A}.\vec{B} = 2 - 1 - 1 = 0$$

5- $\theta(\vec{A}, \vec{B})$

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

note

$\pi = 180^\circ$

$\frac{\pi}{2} = 90^\circ$

$\frac{3\pi}{2} = 270^\circ$

$2\pi = 360^\circ$

$$\left|\vec{B}\right| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \left|\vec{A}\right| x \left|\vec{B}\right|.\mathrm{Cos}\theta$$

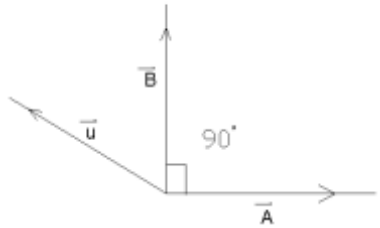
$$0 = \sqrt{3}\ x\ \sqrt{6}.\mathrm{Cos}\theta$$

$$\therefore \mathrm{Cos}\theta = 0$$

$$\therefore \theta = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$$

ان المتجهين $\vec{B}, \vec{A}$ متعامدين لأن الزاوية 90°

6- $\vec{u}(A,B) = \frac{\vec{A}\,x\,\vec{B}}{\left|\vec{A}\,x\,\vec{B}\right|}$



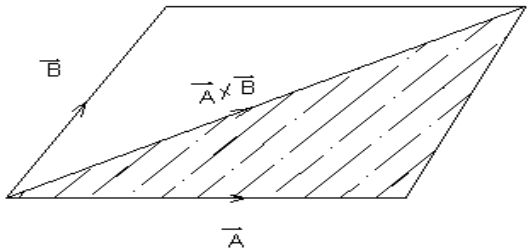
$$\vec{u} = \frac{3j - 3k}{3\sqrt{2}}$$

$$\therefore \vec{u} = \frac{3}{3\sqrt{2}} j - \frac{3}{3\sqrt{2}} k$$

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} j - \frac{1}{\sqrt{2}} k$$

✎ **Example:**

أوجد مساحة متوازي الأضلاع ثم مساحة المثلث وقيمة متجه الوحدة العمودي على $\vec{B}, \vec{A}$



$$\vec{A} = 2i + j - 2k$$
$$\vec{B} = i + 3j + 4k$$

✯ **مساحة متوازي الأضلاع = القاعدة x الارتفاع**

$$\vec{A} x \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} x \vec{B} = i\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - k\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= i(4+6) - j(8+2) + k(6-1)$$
$$= 10i - 10j + 5k$$

نجد الطول للمتجه الجديد حتى نتخلص من K,j,I .

$$\left|\vec{A} x \vec{B}\right| = \sqrt{10^2 + 10^2 + 5^2}$$
$$= \sqrt{100 + 100 + 25} = \sqrt{225} = 15$$

∴ مساحة متوازي الأضلاع =15

لإيجاد مساحة المثلث نقسم القيمة على 2

∴ مساحة المثلث $7.5 = \frac{15}{2}$

$$\vec{u}(\vec{A}, \vec{B}) = \frac{\vec{A} x \vec{B}}{\left|\vec{A} x \vec{B}\right|}$$

$$= \frac{10i - 10j + 5k}{15} \qquad = \frac{10}{15} i - \frac{10}{15} j + \frac{5}{15} k$$

$$\vec{u} = \frac{2}{3} i - \frac{2}{3} j + \frac{1}{3} k$$

✎ **Example:**

$\vec{A} = 3i + j - 2k$

$\vec{B} = -i + 3j + 4k$

أوجد مساحة متوازي الأضلاع والمثلث

$$\vec{A} x \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} x \vec{B} = i\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= i(\ 10) - j(\ 10) + k(\ 10)$$

$$= 10i - 10j + 10k$$

الرسم كما في المثال السابق

$$\therefore \left|\vec{A}\ x \vec{B}\right| = \sqrt{10^2 + 10^2 + 10^2}$$

$$= \sqrt{100 + 100 + 100} = \sqrt{300}$$

$$= \sqrt{3 * 100} = 10\sqrt{3}$$

$\therefore$ مساحة متوازي الأضلاع $= 10\sqrt{3}$

مساحة المثلث $= \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$

لإيجاد قيمة الوحدة العمودي $\vec{u}$

$$\vec{u} = \frac{10i - 10j + 10k}{10\sqrt{3}} = \frac{10}{10\sqrt{3}} i - \frac{10}{10\sqrt{3}} j + \frac{10}{10\sqrt{3}} k$$

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}} i - \frac{1}{\sqrt{3}} j + \frac{1}{\sqrt{3}} k$$

✎ **Example:**

$\vec{A} = 3i + 9j + 6k$

$\vec{B} = i + 3j + 2k$

هل إن $\vec{A} \perp \vec{B}$ أو $\vec{A} // \vec{B}$ أثبت ذلك

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 3 + 27 + 12 = 42$$

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{3^2 + 9^2 + 6^2} = \sqrt{9 + 81 + 36} = \sqrt{126}$$

$$\left|\vec{B}\right| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 9 + 4} = \sqrt{14}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}| x |\vec{B}|.\cos\theta$$

$$42 = \sqrt{126}\ x\ \sqrt{14}.\ \cos\theta$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{42}{\sqrt{126}\ x\ \sqrt{14}} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{42}{\sqrt{126}\ x\ \sqrt{14}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{42}{11.2249726 x 3.74165}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{42}{42}\right) = \cos^{-1}(1) = \therefore \theta = 0$$

$$\vec{A} x \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 9 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} x \vec{B} = i\begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= i(18-18) - j(6-6) + k(-9+9)$$

$$= 0\cdot i + 0\cdot j + 0\cdot k$$

$\therefore$ المتجهين متوازيان لان الزاوية الناتجة قيمتها صفر .

$$\therefore \vec{A} x \vec{B} = 0$$

$$\Rightarrow \sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$$

تمارين تطبيقية :-

جد مساحة متوازي الإضلاع

1- $\vec{A} = 3i - 2j + k$

$\vec{B} = i - k$

ثم جد قيمة متجه الوحدة

2- إذا كانت

$\vec{V}_1 = i - k$

$\vec{V}_2 = j - k$

أوجد 1- $\vec{V}_1 + \vec{V}_2$ 2- $3\vec{V}_2 - 2\vec{V}_1$ 3- $\vec{V}_1 x \vec{V}_2$ 4- θ 5- $\theta(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$ بطريقة الضرب النقطي .

3-

$\vec{A} = i + j + k$

$\vec{B} = 2i - j - k$

$\vec{C} = 2i + 3j + 5k$

أوجد $\theta\angle\vec{A},\vec{B})$, $\theta\angle\vec{B},\vec{C})$, $\theta\angle\vec{A},\vec{C})$

باستخدام قانون الضرب ألاتجاهي (الديكارتي العددي)

4- $\vec{A} = 3i - 2j + 4k$

$\vec{B} = 2i - k$

$\vec{C} = -j + k$

أوجد $\vec{A}\cdot\vec{B}$, $\vec{A}\cdot\vec{C}$, $(\vec{C}\cdot\vec{B})$, $\theta\angle(\vec{A},\vec{B})$, $\vec{A} \times \vec{B}$

5- $\vec{V}_1 = 3i + j - 2k$

$\vec{V}_2 = -i + 3j + 4k$

أوجد مساحة متوازي الأضلاع ثم مساحة المثلث ثم قيمة متجه الوحدة $\vec{u}$

❁الأعداد المركبة Complex Numbers ❁

لحل معادلة من الدرجة الثانية بطريقة الدستور ينتج منها عدد مركب

✎ **Example:**

$x^2 - 2x + 5 = 0$ $\qquad a = 1$

a b c $\qquad b = -2$

$c = 5$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} \quad \Rightarrow \text{let } i = \sqrt{-1}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-1}\cdot\sqrt{16}}{2}$$

$$\therefore x = \frac{2 \pm i4}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 1 \pm 2i$$

∴ **الناتج هو عدد مركب من جزء حقيقي وجزء تخيلي .**

✎ **Example:**

$x^2 + 2x + 3 = 0$ $\qquad a = 1$

a b c $\qquad b = 2$

$c = 3$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(3)(1)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

$$\therefore x = \frac{-2 \pm i2\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore x = -1 \pm \sqrt{2}\, i \qquad \Rightarrow Z(-1, \sqrt{2}) \text{ or } Z(-1, -\sqrt{2})$$

Real جزء حقيقي $\qquad$ Img جزء خيالي

∴ العدد المركب Z يعرف بانه زوج مرتب Z(x,y) حيث ان y,x عددان حقيقيان أو يكتب على صورة Z=x+yi

X يسمى الجزء الحقيقي Real part

Y يسمى الجزء الخيالي Img part

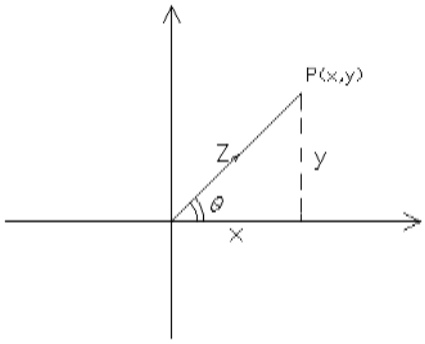
i يسمى بالوحدة الخيالية

حيث أن $i=\sqrt{-1}$, $i^2=-1$, $i^3=-\sqrt{-1}$ وهكذا

$$i^4 = i^2 . i^2 = -1 * -1 = 1 \qquad i^5 = i . i^4 = i$$

$$, \ i^6 = -1$$

✎ **Example:**



$Z=(2,3)$

$\therefore Z=2+3j$

$x=R(Z)=2$

$y=Im(Z)=3$

لكي نرسم العدد المركب Z نستخرج طول Z

$$|Z|=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$|Z|=\sqrt{2^2+3^2}$$

$$|Z|=\sqrt{4+9}$$

$$\therefore |Z|=\sqrt{13}$$

العدد المرافق يعرف $\bar{Z}$:

$$Z=x+yi \rightarrow \bar{Z}=x-yi$$

$$Z_1=2+3i \rightarrow \bar{Z}_1=2-3i$$

أي عكس أشارة الجزء الخيالي فقط

$$Z_2=-2+7i \rightarrow \bar{Z}_2=-2-7i$$

عندما ينتج i^2 نعوض بدلاً منه (-1) عندما يكون لدينا كسر يضرب في مرافق المقام للتخلص من الكسر .

العمليات الجبرية على الأعداد العقدية

1- الجمع 2- الطرح 3- الضرب 4- القسمة 5- إيجاد الطول .

✎ **Example:**

if $Z_1 = 1+2i$

$Z_2 = 2-i$

Find 1) $Z_1 + Z_2$ 2) $Z_1 - Z_2$ 3) $|2Z_1 + 3Z_2|$ 4) $Z_1 . Z_2$

5) $\frac{Z_1}{Z_2}$ 6) $\frac{1}{Z_1}$ 7) $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)$

---

1) $Z_1 = 1+2i$

$Z_2 = 2-i$

$\overline{Z_1 + Z_2 = 3+i}$

let $Z_1 = x_1 + iy_1$

$Z_2 = x_2 + iy_2$

$\overline{Z_1 + Z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)}$

---

2) $Z_1 = 1+2i$

$Z_2 = 2-i$

$\overline{Z_1 - Z_2 = -1+3i}$ $\Rightarrow Z_1 - Z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

---

3) $2Z_1 = 2+4i$

$3Z_2 = 6-3i$

$\overline{2Z_1 + 3Z_2 = 8+i}$

$|2Z_1 + 3Z_2| = \sqrt{8^2 + 1^2} = \sqrt{65} \Rightarrow |Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

---

4) $Z_1.Z_2 = (1+2i)(2-i)$

$= 2 - i + a4i - 2i^2 \quad \rightarrow i^2 = -1$

$= 2 + 3i + 2$

$= 4 + 3ia$

صيغة القانون

$Z_1.Z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$

$= x_1.x_2 + ix_1.y_2 + ix_2y_1 + y_1.y_2.i^2$

$= x_1.x_2 - y_1.y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$

$\therefore Z_1.Z_2 = 4 + 3i \rightarrow$ Conjugat $\rightarrow$ Conjugat $\overline{Z_1.Z_2} = 4 - 3i$

$$5)\ \frac{Z_1}{Z_2}=\frac{1+2i}{2-i} \qquad \overline{Z_2}=2+i$$

∴ للتخلص من الكسر نضرب بمرافق المقام .

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{(1+2i)}{(2-i)}*\frac{(2+i)}{(2+i)}=\frac{2+4i+i+2i^2}{4-2i+2i-i^2}$$

$$=\frac{2-2+4i+i}{4+1}=\frac{5i}{5}=i$$

$$\therefore \frac{Z_1}{Z_2}=i \qquad \rightarrow Re(Z)=0 \ , \ Im(Z)=1$$

$$6)\ \frac{1}{Z_1}=\frac{1}{(1+2i)}*\frac{(1-2i)}{(1-2i)}$$

$$=\frac{1-2i}{1+4}=\frac{1-2i}{5}$$

$$\therefore \ \frac{1}{Z_1}=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i \quad \Rightarrow \ Re(Z)=\frac{1}{5} \ \ Im(Z)=\frac{-2}{5}$$

$$7)\left(\frac{\overline{Z_1}}{Z_2}\right)=-i$$

صيغة القانون:

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} \qquad \text{if } Z_2\neq 0$$

$$\overline{Z_2}=x_2-iy_2$$

$$\therefore \ \frac{Z_1}{Z_2}=\frac{(x_1+iy_1)}{(x_2+iy_2)}*\frac{(x_2-iy_2)}{(x_2-iy_2)}$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2+i(y_1x_2.x_1y_2)}{x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2}}.$$

تمارين تطبيقية :

1− let $Z_1=2+3i$

$Z_2=4+5i$

Find 1) Z_1+Z_2 2) $|3Z_1-2Z_2|$ 3) $Z_1.Z_2$ 4) $\frac{Z_1}{Z_2}$

2− let $Z_1=5+3i$

$Z_2=-2+7i$

Find 1) Z_1+Z_2 2) $|3Z_1-2Z_2|$ 3) $Z_1.Z_2$ 4) $\frac{Z_1}{Z_2}$

3- Prove that

$$\frac{5+5i}{3-4i}+\frac{20}{4+3i}=3-i$$

$$\frac{(5+5i)}{(3-4i)}*\frac{(3+4i)}{(3+4i)}+\frac{20}{(4+3i)}*\frac{(4-3i)}{(4-3i)}$$

$$=\frac{15+20i+15i+20i^2}{9+12i-12i-16i^2}+\frac{80-60i}{16-12i+12i-9i^2}$$

$$=\frac{-5+35i}{25}+\frac{80-60i}{25}$$

$$=\frac{-5+35i+80-60i}{25}=\frac{75-25i}{25}=3-i$$

4- Prove that

$$\frac{(\overline{2+i})^2}{(3-4i)}=1$$

$$\Rightarrow \quad \overline{2+i}=2-i$$

$$\therefore \frac{(2-i)^2}{3-4i}=\frac{(2-i)\ (2-i)}{3-4i}$$

$$=\frac{4-1-2i-2i}{3-4i}$$

$$=\frac{3-4i}{3-4i}=1$$

5- Prove that

$$\frac{3i^{30}-i^{19}}{2i-1}=1+i$$

✯ **إذا كان الأسس عدد زوجي فأن النتائج أما** -1 أو +1

$$i^{30}=(i^2)^{15}=(-1)^{15}=-1$$

$$i^{100}=(i^2)^{50}=(-1)^{50}=+1$$

✯✯ **أما إذا كان الأسس عدد فردياً فأن النتائج** -i أو +i

$$i^{19}=i.i^{18}=i(i^2)^9=i(-1)^9=-i$$

$$i^{17}=i.i^{16}=i(i^2)^8=i(-1)^8=i$$

$$\Rightarrow \quad 3i^{30}-i^{19}=3(-1)-(-i)=-3+i$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-3+i}{2i-1}=\frac{-3+i}{2i-1}*\frac{(-2i-1)}{(-2i-1)}$$

$$=\frac{6i+3-2i^2-i}{-4i^2-2i+2i+1}=\frac{5i+3+2}{4+1}=\frac{5i+5}{5}$$

$$=\frac{5}{5}(i+1)=1+i$$

6- Prove that :

$$\frac{5i^{19}-i^{100}}{2i^{81}-i^{77}}=-5+i$$

$$i^{19}=i(i^{18})=i(i^2)^9=i(-1)^9=-i$$

$$i^{100}=(i^2)^{50}=(-1)^{50}=1$$

$$i^{81}=i(i)^{80}=i(i^2)^{40}=i(-1)^{40}=i$$

$$i^{77}=i(i^2)^{38}=i(-1)^{38}=i$$

$$\therefore \frac{5(-i)-1}{2i-i}=\frac{-5i-1}{i}*\frac{-i}{-i}=\frac{5i^2+i}{-i^2}$$

$$=\frac{5(-i)+i}{-(-1)}=\frac{-5+i}{1}=-5+i$$

بسط العدد المركب مع كتابة الجزء الحقيقي والجزء التخيلي

✎ **Example:(7)-***Find Re(Z) and Im(Z)*

$$1-Z_1=i^7-3i^2$$
$$Z_1=i(i)^6-3(-1)$$
$$=i(i^2)^3+3$$
$$=i(-1)^3+3$$
$$=-i+3\Rightarrow Re(Z_1)=3 \qquad Im(Z_1)=-1$$

$$2-Z_2=i^{17}$$
$$Z_2=i(i^2)^8=i(-1)^8=i\Rightarrow Re(Z_2)=0,\quad Im(Z_2)=1$$

$$3-Z_3=5i^{70}$$
$$Z_3=5(i^2)^{35}=5(-1)^{35}=-5\Rightarrow Re(Z_3)=-5,\quad Im(Z_3)=0$$

$$4-Z_4=1+i^{15}$$
$$Z_4=1+i(i)^{14}=1+i(-i^2)^7=1+i(-1)^7=1-i\Rightarrow Re(Z_4)=1,\quad Im(Z_4)=-1$$

أثبت أن :

$$\frac{3+4i^{30}}{2+i}=\frac{-2}{5}+\frac{i}{5}$$

✯صيغ كتابة العدد المركب :

1-صيغة المحاور المتعامدة أو (الصيغة العامة **(Rectangular**

$$Z = x + yi$$

2-الصيغة المثلثية (Traingular)

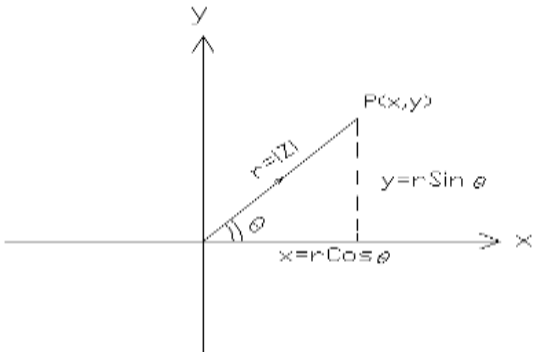
$$Z = r\{\ \cos\theta + i\sin\theta`$$

3- الصيغة الأسية (Exponential)

أو صيغة أويلر $Z = re^{i\theta}$

4- الصيغة القطبية (Polar) $Z = r|\underline{\theta}$

لتحويل العدد المركب الى الصيغة القطبية من الصيغة الجبرية



$$r = |Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$Z = x + iy$$

من الشكل اعلاه نلاحظ

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} \longrightarrow x = r.\cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \longrightarrow y = r.\sin\theta$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\vartheta$$

$$\therefore Z = x + iy$$

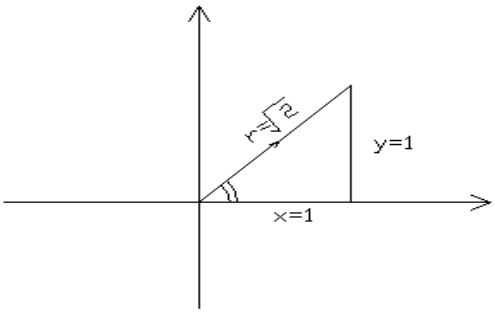
$$Z = r\cos\theta + ir\sin\theta$$

$$= r[\cos\theta + i\sin\theta]$$ **الصيغة المثلثية**

$$Z = re^{i\theta}$$ **الصيغة الآسية**

$$Z = r|\underline{\theta}$$ **الصيغة القطبية**

☜ **مثال(1) :حول العدد العقدي من الصيغة الجبرية الى القطبية**



$Z = 1 + i$

$x = 1 \ , y = 1$

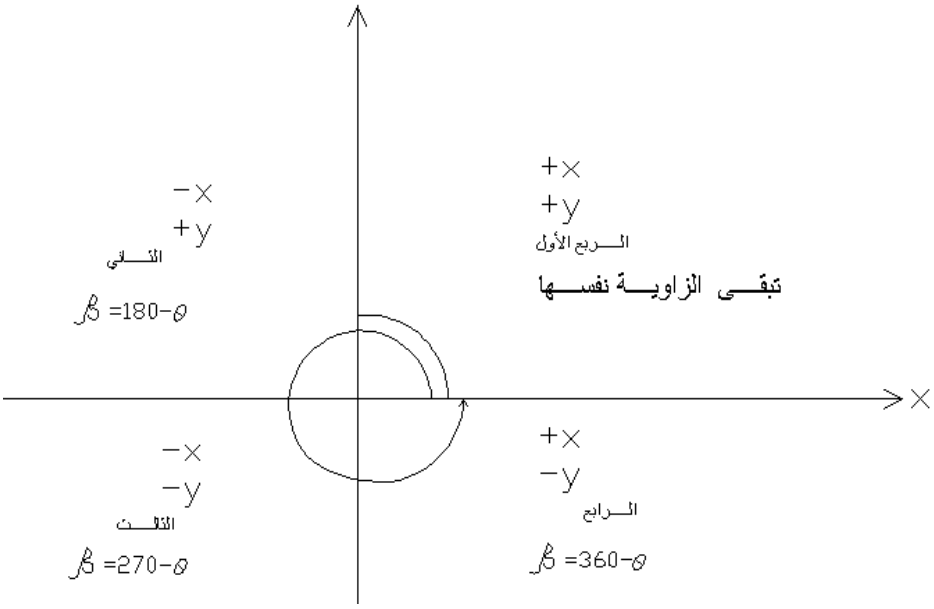
$r = |Z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\text{Cos}\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \Rightarrow \theta = 45^\circ$

∴ **الزاوية تقع في الربع الأول لا تحتاج الى زاوية متممة .**

$\therefore Z = r(\text{Cos}\theta + i\,\text{Sin}\theta)$

الصيغة المثلثية $= \sqrt{2}(\text{Cos}45^\circ + i\,\text{Sin}45^\circ)$

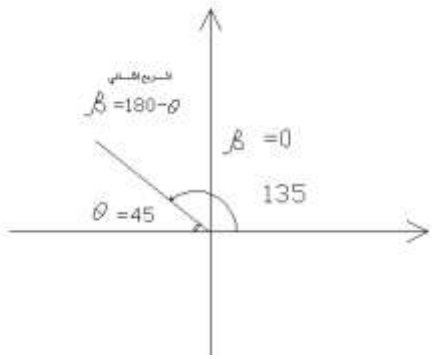


$Z = re^{i\theta}$

الاسية $Z = \sqrt{2}e^{i45}$

القطبية $Z = \sqrt{2} \ \underline{|45^\circ}$

☜ **مثال (2) :اكتب العدد بالصيغة القطبية و الأسية .**



$$Z = -5 + 5i \;\Rightarrow\; x = -5 \;, y = 5$$

$$r = |Z| = \sqrt{5^2 + 5^2}$$

$$= \sqrt{50} + \sqrt{25x2} = 5\sqrt{2}$$

$$\tan\theta = \frac{-5}{5} = -1 \qquad \Rightarrow \theta = -45^\circ$$

∴ **يجب إيجاد الزاوية المتممة في الربع الثاني .**

$$\beta = 180 - \theta$$

$$\beta = 180 - 45 = 135^\circ$$

$$\therefore Z = 5\sqrt{2}(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$$

$$Z = 5\sqrt{2}\, e^{i135}$$

$$Z = 5\sqrt{2} \;\underline{|135^\circ}$$

☜ **مثال (3):حول العدد من الصيغة المثلثية الى الصيغة الجبرية .**

$$\therefore Z = 2\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$$

$$\Rightarrow\; r = 2\sqrt{2} \qquad \theta = 45^\circ$$

$$x = r\cos\theta \qquad\qquad y = r\sin\theta$$

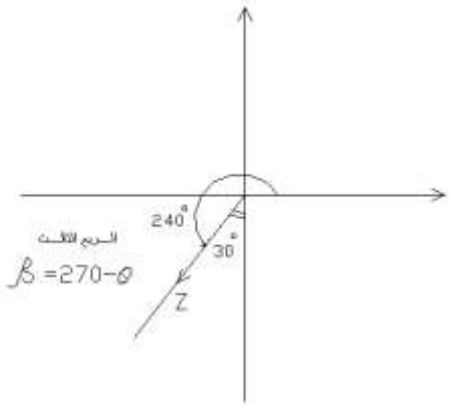
$$x = 2\sqrt{2}\cos 45^\circ \qquad\qquad y = 2\sqrt{2}\sin 45^\circ$$

$$x = 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad\qquad y = 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x = 2 \qquad\qquad y = 2$$

$$\therefore Z = 2 + 2i$$

☜ **مثال (4) :اكتب العدد بالصيغة القطبية والأسية .**



$$Z = -\sqrt{6} - \sqrt{2}i \;\Rightarrow\; x = -\sqrt{6} \;\; , y = -\sqrt{2}$$

$$r = |Z| = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + (\sqrt{2})^2}$$

$$= \sqrt{6+2} = \sqrt{8} = \sqrt{4x2} = 2\sqrt{2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-\sqrt{2}}{-\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2x\sqrt{3}}} \qquad \therefore \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \theta = 30^\circ$$

تقع في الربع الثالث الزاوية المتممة

$$\beta = 270 - \theta$$

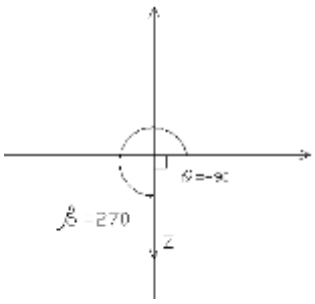
$$\beta = 270 - 30 = 240^\circ$$

$$\therefore Z = 2\sqrt{2}(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ)$$

$$Z = 2\sqrt{2}\, e^{i240}$$

$$Z = 2\sqrt{2} \;\; \underline{|240^\circ}$$

☜ **مثال (5) :اكتب العدد بالصيغة القطبية .**



$$Z = -3i$$

$$\Rightarrow x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad X = +$$

$$y = -3$$

$$r = |Z| = \sqrt{0 + 3^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-3}{0} = -\infty \qquad \Rightarrow \theta = -90^\circ$$

العدد يقع في الربع الرابع ∴الزاوية المتممة

$\beta = 360^\circ - \theta$

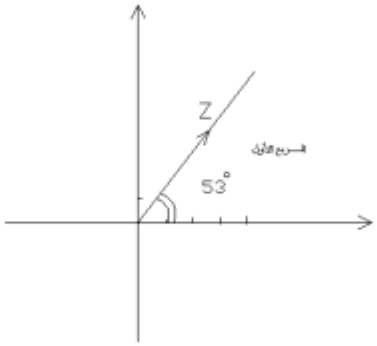
$\beta = 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$

$\therefore Z = 3(\ \mathrm{Cos}270^\circ + i\,\mathrm{Sin}270^\circ)$

$Z = 3e^{i\,270}$

$Z = 3 \quad \underline{|270^\circ}$

☜ **مثال (6):حول العدد إلى الصيغة الآسية .**



$Z = 3 + 4i \Rightarrow x = 3$

$y = 4$

$r = |Z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

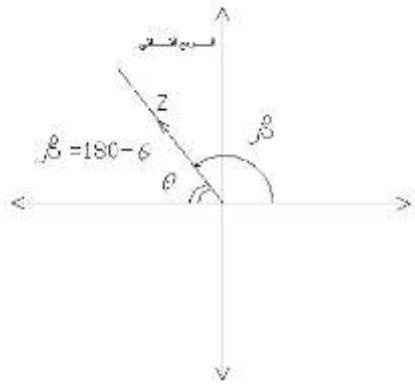
$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{4}{3} \qquad \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(\frac{4}{3}) = 53^\circ$

$\therefore$ الزاوية تقع في الربع الأول .

$\therefore Z = 5(\ \mathrm{Cos}53^\circ + i\,\mathrm{Sin}53^\circ)$

$Z = 5e^{i53}$

☜ **مثال (7) :حول العدد المركب الى الصيغة القطبية .**



$Z = -2 + 2\sqrt{3}i \qquad \Rightarrow x = -2$

$y = 2\sqrt{3}$

$|Z| = r = \sqrt{2^2 + 4x3} = \sqrt{16}$

$\therefore r = 4$

$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3}$

$\therefore \theta = -60^\circ$

$\beta = 180 - 60 = 120^\circ$

$\therefore Z = 4(\ \mathrm{Cos}120^\circ + i\,\mathrm{Sin}120^\circ)$

$Z = 5e^{i120} \qquad , Z = 4 \quad \underline{|120^\circ}$

☜ **مثال (8) :حول العدد المركب إلى الصيغة المحاور المتعامدة .**

$Z = 4 \ \underline{|120^\circ}$

$r = 4 \quad ,\beta = 120^\circ \quad \Rightarrow y,-x \therefore$

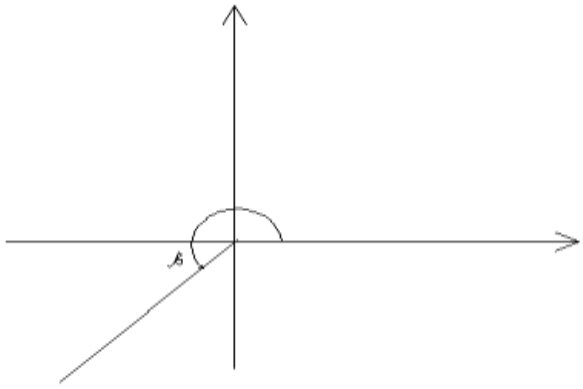
$\theta = 180-120 = 60^\circ$

$-x = r\,Cos\theta o \quad \Rightarrow -x = 4\ Cos60 = 4x\frac{1}{2} \quad \therefore x = -2$

$y = r\,Sin\theta i \quad \Rightarrow y = 4\ Sin60 = 4x\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore y = 2\sqrt{3}$

$\therefore Z = -2 + 2\sqrt{3}\ i$

☜ **مثال (9) :حول العدد المركب إلى المحاور المتعامدة إي الصيغة الجبرية .**



$Z = 2\sqrt{2} \ \underline{|240^\circ}$

$r = 2\sqrt{2} \quad ,\beta = 240^\circ$

$\therefore$ **الزاوية تقع في الربع الثالث** . $\Leftarrow -x \ ,-y$

$\theta = 270-240 = 30^\circ$

$-x = r\ Cos\theta$

$-x = 2\sqrt{2}..Cos30^\circ$

$= 2\sqrt{2}.-.\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}$

$\therefore x = -\sqrt{6}$

$-y = r\ Sin\theta$

$-y = 2\sqrt{2}..Sin30^\circ$

$= 2\sqrt{2}.-.\frac{1}{2} = \sqrt{2}$

$\therefore y = -\sqrt{2}$

$\Rightarrow Z = -\sqrt{6} - \sqrt{2}\ i$

✍ تمارين تطبيقه

س1) اكتب العدد المركب بالصيغة القطبية

1) $Z = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$

2) $Z = -9 + 3i$

3) $Z = \sqrt{2}i + \sqrt{2}$

4) $Z = -\sqrt{3} - \sqrt{2}i$

5) $Z = 4i$

6) $Z = \sqrt{2}i$

7) $Z = \sqrt{3+i}$

8) $Z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

س2) حول العدد إلى صيغة المحاور المتعامدة

1) $Z = 2\sqrt{2} \ \underline{|210^\circ}$

2) $Z = 5 \ \underline{|35^\circ}$

3) $Z = 2\sqrt{2} \ \underline{|45^\circ}$

4) $Z = 5\sqrt{2} \ \underline{|135^\circ}$

5) $Z = 3 \ \underline{|\pi}$

2) $Z = 12e^{\pi/2i}$

3) $Z = 2e^{5\pi/4i}$

4) $Z = 5e^{7\pi/6i}$

♣♣ الضرب والقسمة والرفع للإعداد المركبة باستخدام الطرق القطبية والمثلثية :-

$$Z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$

$$Z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

1- $Z_1 Z_2 = r_1 . r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$

وذلك بضرب الأقواس وتبسيط جبري باستفادة من قوانين النسب المثلثية لحاصل جمع وطرح زاويتين .

2- $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$

بشرط إن $Z_2 \neq 0$

※ نظرية ديموافر DeMoiver's Theory ※

3- $Z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

حيث إن n عدد صحيح موجب ولإيجاد الجذور النونية .

4- $Z^{1/n} = r^{1/n}(\cos\frac{\theta + 2K\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2K\pi}{n})$

حيث إن K= 0,1,2,……n-1

✎ **Example(1):**

$Z_1 = 3(\cos 100 + i\sin 100)$

$Z_2 = \sqrt{5}(\cos 30 + i\sin 30)$

Find (1) $Z_1 . Z_2$ (2) Z_1/Z_2 (3) Z_1^{10}

(4) $Z_1^{1/2}$ (5) $Z_2^{1/3}$

1- $Z_1 . Z_2 = 3 * \sqrt{5}(\cos(100+30) + i\sin(100+30))$

$= 3\sqrt{5}(\cos 130 + i\sin 130)$

2- $Z_1/Z_2 = 3/\sqrt{5}(\cos(100-30) + i\sin(100-30))$

$= 3/\sqrt{5}(\cos 70 + i\sin 70)$

3- $Z_1^{10} = 3^{10}(\cos(10*100) + i\sin(10*100))$

$= 3^{10}(\cos 1000 + i\sin 1000)$

4- $Z_1^{1/2} = 3^{1/2}(\cos \frac{100+2K\pi}{2} + i\sin \frac{100+2K\pi}{2})$

$n = 2$, $k = 0,1$

(i) $k = 0$

$Z_1^{1/2} = 3^{1/2}(\cos \frac{100}{2} + i\sin \frac{100}{2})$

$= 3^{1/2}(\cos 50 + i\sin 50)$

(ii) $k = 1$

$Z_1^{1/2} = 3^{1/2}(\cos \frac{100+2\pi}{2} + i\sin \frac{100+2\pi}{2})$

$= 3^{1/2}(\cos 230 + i\sin 230)$

5- $Z_2^{1/3} = (\sqrt{5})^{1/3}(\cos \frac{30+2K\pi}{3} + i\sin \frac{30+2K\pi}{3})$

$n = 3$, $k = 0,1,2$

(i) $k = 0$

$Z_2^{1/3} = (\sqrt{5})^{1/3}(\cos \frac{30}{3} + i\sin \frac{30}{3})$

$= (\sqrt{5})^{1/3}(\cos 10 + i\sin 10)$

ii) $k=1$

$$Z_2^{1/3}=(\sqrt{5})^{1/3}\left(\cos\frac{30+2\pi}{3}+i\sin\frac{30+2\pi}{3}\right)$$

$$=(\sqrt{5})^{1/3}\left(\cos\frac{390}{3}+i\sin\frac{390}{3}\right)$$

$$=(\sqrt{5})^{1/3}(\cos 130+i\sin 130)$$

iii) $k=2$

$$Z_2^{1/3}=(\sqrt{5})^{1/3}\left(\cos\frac{30+4\pi}{3}+i\sin\frac{30+4\pi}{3}\right)$$

$$=(\sqrt{5})^{1/3}\left(\cos\frac{750}{3}+i\sin\frac{750}{3}\right)$$

$$=(\sqrt{5})^{1/3}(\cos 250+i\sin 250)$$

✎ **<u>Example:(2)</u>**

$$Z_1=4(\cos 120+i\sin 120)$$

$$Z_2=3(\cos 70+i\sin 70)$$

$$Z_3=5(\cos 90+i\sin 90)$$

Find(1)- $Z_1.Z_2$ (2)- $Z_1.Z_3$ (3)- Z_1/Z_2

(4)- Z_1^{100} (5)- Z_3^{40} (6)- $\left(\frac{Z_1.Z_2}{Z_3}\right)^{30}$

1- $Z_1.Z_2=4*3(\cos(120+70)+i\sin(120+70))$

$=12(\cos 190+i\sin 190)$

2- $Z_1.Z_3=4*5(\cos(120+90)+i\sin(120+90))$

$=20(\cos 210+i\sin 210)$

3- $\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{4}{3}(\cos(120-90)+i\sin(120-90))$

$=\frac{4}{3}(\cos 50+i\sin 50)$

$$4-\quad Z_1^{100}=4^{100}(\cos 100*120+i\sin 100*120)$$
$$=4^{100}(\cos 12000+i\sin 12000)$$

$$5-\quad Z_3^{40}=5^{40}(\cos 40*90+i\sin 40*90)$$
$$=5^{40}(\cos 3600+i\sin 3600)$$

$$6-\left(\frac{Z_1.Z_2}{Z_3}\right)^{30}=\left(\frac{12}{5}\right)^{30}(\cos 30*(190-90)+i\sin 30(190-90))$$
$$=\left(\frac{12}{5}\right)^{30}(\cos 30*100+i\sin 30*100)$$
$$=\left(\frac{12}{5}\right)^{30}(\cos 3000+i\sin 3000)$$

مثال(3): أحسب Z1.Z2 ثم اكتب العدد الناتج بالصيغة الجبرية مع كتابة الجزء الحقيقي والتخيلي

$$Z_1=2(\cos 25+i\sin 25)$$
$$Z_2=5(\cos 110+i\sin 110)$$
$$Z_1.Z_2=2*5(\cos(25+110)+i\sin(25+110))$$
$$Z_1.Z_2=10(\cos 135+i\sin 135)$$

$$Z=10\angle 135^0$$
$$r=10$$

الزاوية تقع في الربع الثاني

$$\beta=180-\theta\Rightarrow\theta=180-135=45^\circ$$
$$-x=10*\frac{1}{\sqrt{2}}\quad\rightarrow\quad x=-\frac{10}{\sqrt{2}}$$
$$y=10*\frac{1}{\sqrt{2}}\quad\rightarrow\quad y=\frac{10}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore Z=10\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$
$$Z=5*2\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$
$$Z=5\sqrt{2}*\sqrt{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$
$$=-5\sqrt{2}+5\sqrt{2}i$$
$$\therefore Re(Z)=-5\sqrt{2}\qquad ,Im(Z)=5\sqrt{2}$$

☜ مثال(4): بسط باستخدام الطرق القطبية والمثلثية $(\frac{Z_1}{Z_2})^{10}$ حيث إن

$$Z_1 = 1+\sqrt{3}i$$

$$Z_2 = 1-\sqrt{3}i$$

$$r_1 = \sqrt{1+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$r_2 = \sqrt{1+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\tan\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

الزاوية تقع في الربع الأول

$$\therefore Z_1 = 2(\ \mathrm{Cos}\,60 + i\mathrm{Sin}60)$$

$$Z_1 = 2\angle 60^\circ$$

$$\tan\theta_2 = \frac{-\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \theta = -60$$

الزاوية تقع في الربع الرابع

$$\therefore \beta = 360-60 = 300$$

$$Z_2 = 2(\ \mathrm{Cos}300 + i\mathrm{Sin}300$$

$$Z_2 = 2\angle 300$$

$$\therefore \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2}{2}(\ \mathrm{Cos}(\ 60-300) + i\mathrm{Sin}(\ 60-300)\ )$$

$$= (\ \mathrm{Cos}(-240) + i\sin(-240)\ )$$

$$\theta = 360-240 = 120^\circ$$

$$\therefore \frac{Z_1}{Z_2} = (\ \mathrm{Cos}120 + i\mathrm{Sin}120)$$

$$(\frac{Z_1}{Z_2})^{10} = (\ \mathrm{Cos}10*120 + i\mathrm{Sin}10*120)$$

$$= (\ \mathrm{Cos}1200 + i\mathrm{Sin}1200)$$

$$\theta = 120^\circ$$

نطرح من 1200 مضاعفات 350 فتصبح الزاوية مقبولة

$=(\cos 120 + i\sin 120)$

θ تقع في الربع الثاني

$$\therefore \theta = 180 - \beta \Rightarrow \theta = 180 - 120 = 60^\circ$$

$$\therefore -x = 1 * \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$y = 1 * \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore Z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

☜مثال(5): إذا كان Z=1-2i اوجد $Z^{1/3}$ حسب نظرية ديموافر.

$$Z = 1 - 2i$$
$$r = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$
$$\tan\theta = \frac{-2}{1} = -2 \Rightarrow \theta = 63^\circ$$

العدد يقع في الربع الرابع

$$\Rightarrow \beta = 360 - 63 = 297$$

$$\therefore Z = \sqrt{5}(\cos 297 + i\sin 297)$$

$$Z^{1/3} = \sqrt{5}^{1/3}\left(\cos\frac{297 + 2K\pi}{3} + i\sin\frac{297 + 2K\pi}{3}\right) \qquad K = 0,1,2$$

☜مثال(6): العدد Z=3+4i اوجد $Z^{1/4}$.

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$
$$\tan\theta = \frac{4}{3} \Rightarrow \theta = 53^\circ$$

العدد يقع في الربع الأول

$$\therefore Z = 5(\cos 53 + i\sin 53)$$

$$Z^{1/4} = 5^{1/4}\left(\cos\frac{53 + 2K\pi}{4} + i\sin\frac{53 + 2K\pi}{4}\right) \qquad k = 0,1,2,3$$

H.W if Z=4-3i , Z=-5+12i Find Z^4 , $Z^{1/4}$

✎Example(7)

$Z_1 = 1 + i$

$Z_2 = 1 - i$

حسب نظرية ديمواڤر

Find 1− $Z_1 * Z_2$ 2− Z_1 / Z_2 3− Z_1^3

$Z_1 = \sqrt{2}(\cos 45 + i\sin 45^\circ)$

$Z_2 = \sqrt{2}(\cos -45 + i\sin -45)$

الزاوية تقع في الربع الرابع

$\beta = 360 - 45 = 315$

$Z_2 = \sqrt{2}(\cos 315 + i\sin 315$

1− $Z_1.Z_2 = \sqrt{2} * \sqrt{2}(\cos(45 + 315) + i\sin(45 + 315))$

$Z_1.Z_2 = 2(\cos 360 + i\sin 360^\circ)$

2− $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} * (\cos(45 - 315) + i\sin(45 - 315))$

$= (\cos(-270) + i\sin(-270))$

$= \cos 90 + i\sin 90)$

3− $Z_1^3 = (\sqrt{2})^3(\cos 3 * 45 + i\sin 3 * 45)$

$= 2\sqrt{2}(\cos 135 + i\sin 135)$

⁂جذور الأعداد المركبة⁂

$$Z^{1/n} = r^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2K\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2K\pi}{n}\right)\right)$$

☜مثال(1): جد جميع جذور العدد المركب $\sqrt[3]{-2i}$.

$Z = 0 - 2i$

$Z^{1/3} = (0 - 2i)^{1/3}$

$x = 0 \ , y = -2$

$$\therefore r=\sqrt{2^2}=\sqrt{4}=2$$

$$\tan\theta_2=\frac{-2}{0}=-\infty\Rightarrow\theta=90^\circ$$

الزاوية تقع في الربع الرابع

$$\beta=360-90=270^\circ$$

$$\therefore Z=2(\cos 270+i\sin 270)$$

$$\therefore Z^{1/3}=2^{1/3}\left(\cos\frac{270+2K\pi}{3}+i\sin\frac{270+2K\pi}{3}\right)$$

ولإيجاد الجذور نعوض عن K ثلاث مرات K=0,1,2

$$Z_1^{1/3}=2^{1/3}\left(\cos\frac{270+2*0*\pi}{3}+i\sin\frac{270+2*0*\pi}{3}\right)$$

$$Z_2^{1/3}=2^{1/3}\left(\cos\frac{270+2*1*\pi}{3}+i\sin\frac{270+2*1*\pi}{3}\right)$$

$$Z_3^{1/3}=2^{1/3}\left(\cos\frac{270+2*2*\pi}{3}+i\sin\frac{270+2*2*\pi}{3}\right)$$

☜ مثال(2): جد الجذور التكعيبية الثلاثة الأولى للعدد المركب .

$$Z=\sqrt{6}-\sqrt{2}i$$

$$Z^{1/3}=(\sqrt{6}-\sqrt{2}i)^{1/3}$$

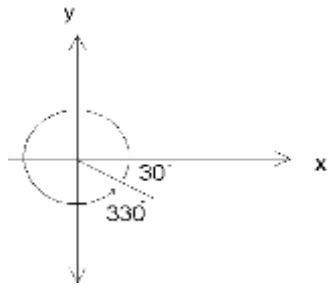
نحول العدد إلى الصيغة المثلثية والقطبية .

$$=\sqrt{\sqrt{6}^2+\sqrt{2}^2}=\sqrt{6+2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$\tan\theta=\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}*\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{1}}{\sqrt{3}}\Rightarrow\theta=30^\circ$$

الزاوية تقع في الربع الرابع

$$\beta=360-30=330^\circ$$



$$\therefore Z=2\sqrt{2}(\cos 330+i\sin 330)$$

$$\therefore Z^{1/3}=(2\sqrt{2})^{1/3}\left(\cos\frac{330+2K\pi}{3}+i\sin\frac{330+2K\pi}{3}\right)$$

$$Z^{1/3} = (2)^{1/3}(\sqrt{2})^{1/3}\left(\cos\frac{330+2K\pi}{3} + i\sin\frac{330+2K\pi}{3}\right)$$

$$(2)^{1/3}(\sqrt{2})^{1/3} = 2^{1/3} * 2^{1/6}$$
$$= 2^{2+1/6}$$
$$= 2^{3/6}$$
$$= 2^{1/2}$$
$$= \sqrt{2}$$

$$= (2)^{1/3}(2)^{1/6}\left(\cos\frac{330+2K\pi}{3} + i\sin\frac{330+2K\pi}{3}\right)$$

$$Z^{1/3} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{330+2K\pi}{3} + i\sin\frac{330+2K\pi}{3}\right)$$

نعوض عن قيمة K بـ K=0,1,2 لإيجاد الجذور .

$$Z_1^{1/3} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{330}{3} + i\sin\frac{330}{3}\right)$$
$$= \sqrt{2}(\cos 110 + i\sin 110)$$

$$Z_2^{1/3} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{330+2*1\pi}{3} + i\sin\frac{330+2*1\pi}{3}\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{330+360}{3} + i\sin\frac{330+360}{3}\right)$$
$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{690}{3} + i\sin\frac{690}{3}\right)$$
$$= \sqrt{2}(\cos 230 + i\sin 230)$$

$$Z_3^{1/3} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{330+2*2\pi}{3} + i\sin\frac{330+2*2\pi}{3}\right)$$
$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{960}{3} + i\sin\frac{960}{3}\right)$$

$$Z_2^{1/3} = \sqrt{2}(\cos 320 + i\sin 320)$$

الجذر الأول

$$Z_1^{1/3} = \sqrt{2}\angle 110^\circ$$

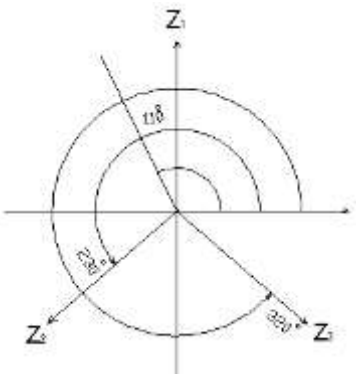
الجذر الثاني

$$Z_2^{1/3} = \sqrt{2}\angle 230^\circ$$

الجذر الثالث

$$Z_3^{1/3} = \sqrt{2}\angle 320^\circ$$

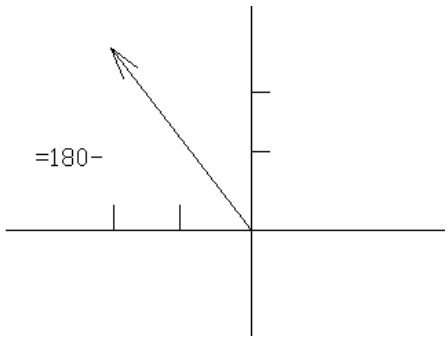
التمثيل الهندسي للجذور .



مثال(3): جد الجذور الخمسة إلى العدد المركب

$$Z = -2 + 2i$$
$$x = -2$$
$$y = 2$$

مع التمثيل الهندسي للجذور .



$$r = |Z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\tan\theta = \frac{2}{-2} = -1 \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

$$\therefore \beta = 180 - 45 = 135^\circ$$

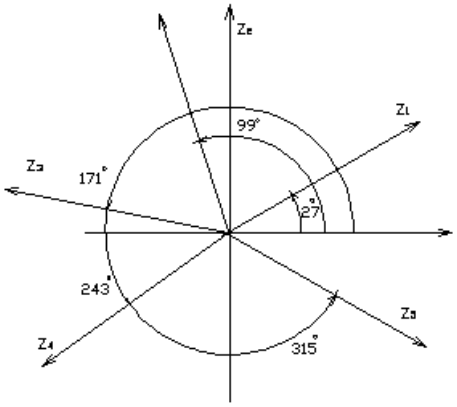
$$\therefore Z = 2\sqrt{2}\left(\cos 135 + i\sin 135\right)$$

عدد الجذور n=5

$$\therefore Z^{1/5} = \left(2\sqrt{2}\right)^{1/5}\left(\cos\frac{135 + 2K\pi}{5} + i\sin\frac{135 + 2K\pi}{5}\right)$$

نعوض عن قيمة K بـ K=0,1,2,3,4 .

$$Z_1^{1/5} = 2^{3/10}\left(\cos\frac{135}{5} + i\sin\frac{135}{5}\right)$$
$$= 2^{3/10}\left(\cos 27^\circ + i\sin 27^\circ\right)$$



$Z_2^{1/5} = 2^{3/10}(\ Cos99^\circ + iSin99^\circ)$

$Z_3^{1/5} = 2^{3/10}(\ Cos171^\circ + iSin171^\circ)$

$Z_4^{1/5} = 2^{3/10}(\ Cos243^\circ + iSin243^\circ)$

$Z_5^{1/5} = 2^{3/10}(\ Cos315^\circ + iSin315^\circ)$

$\therefore Z_1^{1/5} = 2^{3/10}\angle 27^\circ \quad , \quad Z_2^{1/5} = 2^{3/10}\angle 99^\circ \quad , \quad Z_3^{1/5} = 2^{3/10}\angle 171^\circ$

$Z_4^{1/5} = 2^{3/10}\angle 243^\circ \quad , \quad Z_5^{1/5} = 2^{3/10}\angle 315^\circ$

☜مثال(4): **جد جذور المعادلة** $Z^4 + 4 = 0$ **مع تمثيل الجذور بالرسم .**

$Z^4 = -4$

$Z = (-4)^{1/4}$

$x = -4 \ , y = 0 \ , n = 4 \ K = 0,1,2,3$

$r = |Z| = \sqrt{(-4)^2} = \sqrt{4^2} = 4$

$\tan\theta = \dfrac{0}{-4} = -0 \Rightarrow \theta = 0$

الزاوية تقع في الربع الثاني

$\therefore \beta = 180 - 0 \Rightarrow \beta = 180^\circ \Rightarrow \beta = \pi$

$\therefore Z = 4(Cos\ \pi + iSin\pi\ )$

$\therefore Z^{1/4} = 4^{1/4}(\ Cos\dfrac{\pi + 2K\pi}{4} + iSin\dfrac{\pi + 2K\pi}{4})$

$K = 0$

$\Rightarrow Z_1^{1/4} = \sqrt{2}(\ Cos\dfrac{\pi}{4} + iSin\dfrac{\pi}{4})$

$\Rightarrow Z_1 \ = 1 + i$

$K = 1$

$\Rightarrow Z_2^{1/4} = \sqrt{2}(\ Cos\dfrac{\pi + 2\pi}{4} + iSin\dfrac{\pi + 2\pi}{4})$

$\Rightarrow Z_2^{1/4} = \sqrt{2}(\ Cos\dfrac{3\pi}{4} + iSin\dfrac{3\pi}{4})$

$= \sqrt{2}(\ Cos135 + iSin135)$

$Z_2 \ = -1 + i$

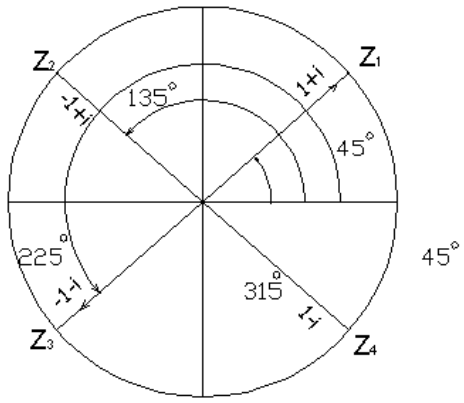
$K = 2$

$$\Rightarrow Z_3^{1/4} = \sqrt{2}\left(\operatorname{Cos}\frac{\pi + 4\pi}{4} + i\operatorname{Sin}\frac{\pi + 4\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow Z_3^{1/4} = \sqrt{2}\left(\operatorname{Cos}\frac{5\pi}{4} + i\operatorname{Sin}\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2}(\operatorname{Cos}225 + i\operatorname{Sin}225)$$

$$Z_3 = -1 - i$$



$K = 3$

$$\Rightarrow Z_4^{1/4} = \sqrt{2}\left(\operatorname{Cos}\frac{\pi + 6\pi}{4} + i\operatorname{Sin}\frac{\pi + 6\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2}(\operatorname{Cos}315^\circ + i\operatorname{Sin}315)$$

$$Z_4 = 1 - i$$

تمارين تطبيقية :

باستعمال الإحداثيات القطبية برهن:

$$(-1 + j)^7 = -8(1 + j)$$

$$\left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right)^3 = 1$$

جد الجذور لكل عدد مركب مع الرسم .

$$1)\ (2i)^{1/2},\quad 2)\ (8)^{1/6},\quad 3)\ (-1)^{1/3},\quad 4)\ \sqrt[4]{-1}$$

جد الجذر الرابع للعدد $-1 - \sqrt{3}i$

جد الجذور التكعيبية الثلاثة للعدد $-8i$

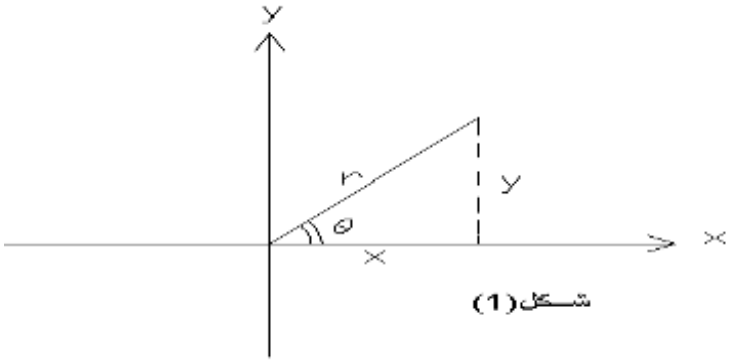
إذا كانت $Z^3 = 27(1 - i)$ **جد قيم** Z .

اوجد الجذرين الرابع والخامس للعدد المركب $Z^5 = -32$

برهن إن $\dfrac{(2(\operatorname{Cos} 15 + i\sin 15))^7}{(4(\operatorname{Cos} 45 + i\sin 45))^3} = \sqrt{3} - i$

★مراجعة للدوال المثلثية ★/ ★قوانين الاسس ★/ ★اللوغارتيمات★ :

★ ★النسب المثلثية ★ Trigonometric function ★ ★



شكل(1)

جـا هـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ --------

$$Sin\ \theta = \frac{y}{r}$$

جتـا هـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ ---------

$$Cos\ \theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan\ \theta = \frac{Sin\ \theta}{Cos\ \theta} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}}$$

ظـا هـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ ---------

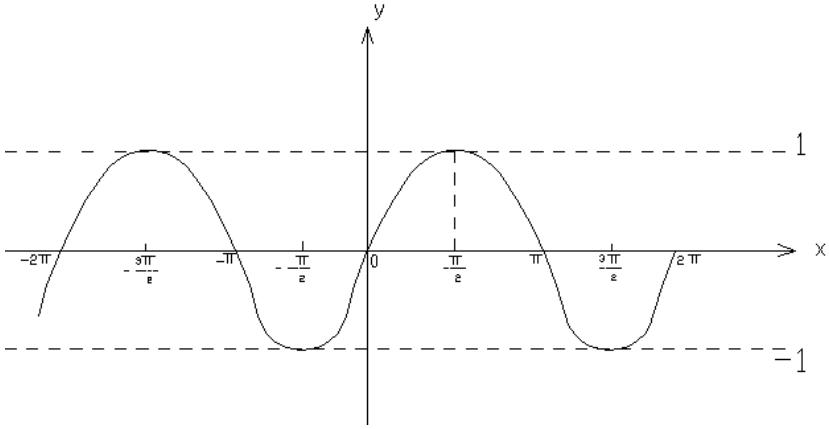
$$\tan\ \theta = \frac{y}{r}.\frac{r}{x} = \frac{y}{x}$$

ظتـا هـ $Cot\ \theta = \frac{1}{\tan\theta}. = \frac{x}{y}$

قتـا هـ $Csc\ \theta = \frac{1}{Sin\,\theta}.$

قـا هـ $Sec\ \theta = \frac{1}{Cos\,\theta}.$

رسم دالة $y = Sin\ x$



$Sin(0) = 0$ $\qquad$ $-2\pi \le x \le 2\pi$

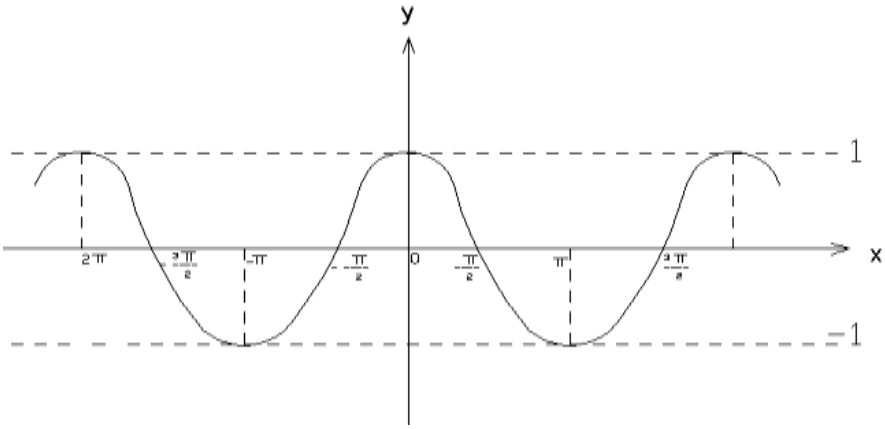
$Sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ $\qquad$ $-1 \le y \le 1$

$Sin\pi = 0$ $\qquad$ $\pi = 180°$

$Sin\frac{3\pi}{2} = -1$

$Sin\,2\pi = 0$

رسم دالة $y = Cos\ x$



$Cos(0\ \ ) = 1$

$Cos(\frac{\pi}{2}) = 0$

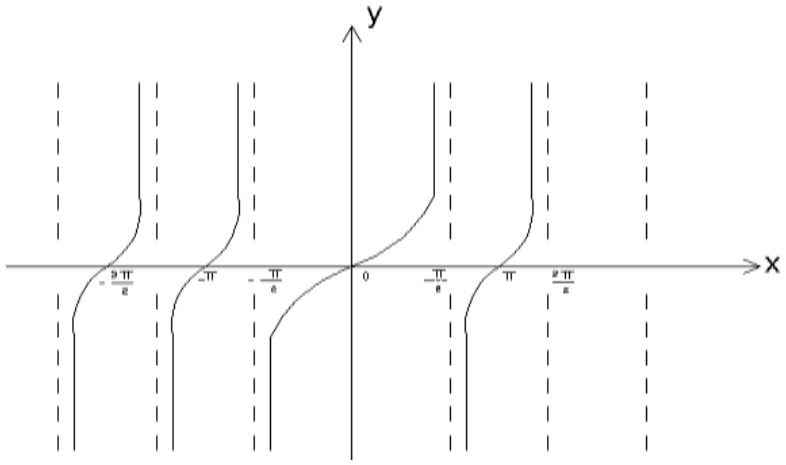
$Cos(\frac{-\pi}{2}) = 0$

$Cos\pi = -1$

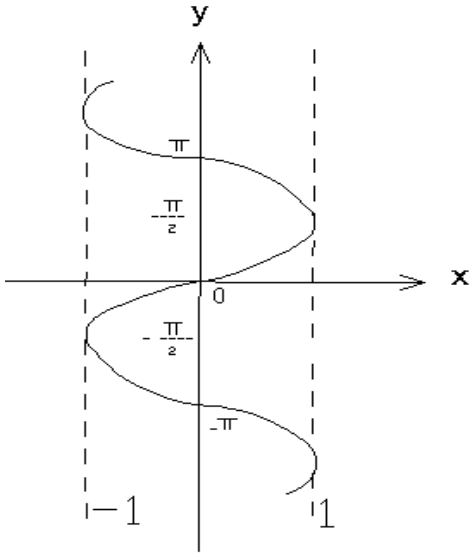
$Cos\frac{3\pi}{2} = 0$

$Cos2\pi = 1$

رسم دالة $y = \tan x$



الدوال المثلثية العكسية تفيد في حل المعادلات التفاضلية ولإيجاد قيم الزوايا



وكذلك بالنسبة إلى دالة **Cos** ودالة tan

$y = \text{Sin}x$

$x = \text{Sin}^{-1}y$

$x = \text{arcSin}y$

★جدول لبعض الدوال الخاصة ★

θ	Θ	Sinθ	Cosθ	tanθ
0	0°	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	∞
π	180°	0	-1	0
$\frac{3\pi}{2}$	270°	-1	0	∞
2π	360°	0	1	0
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

❁خواص النسب المثلثية ❁ Properties of triangular function❁

يمكن حساب النسب المثلثية من المثلث القائم الزاوية بتطبيق نظرية فيثاغورس
مربع الوتر = مجموع مربع الضلعين الآخرين
من شكل رقم (1)

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad .....(*)$$

بالقسمة على $r^2 \Leftarrow$

$$\frac{r^2}{r^2} = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2}$$

$$1 = \left(\frac{x^2}{r^2}\right) + \left(\frac{y^2}{r^2}\right)$$

$$1 = Cos^2\theta + Sin^2\theta \qquad .....(1)$$

$$Cos^2\theta + Sin^2\theta = 1$$

المعادلة (*)بالقسمة على x^2

$$\frac{r^2}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^2}$$

$$\left(\frac{r}{x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 \qquad \Rightarrow Sec^2\theta = 1 + tan^2\theta \qquad .....(2)$$

بالقسمة على $y^2 \Leftarrow$

$$Cot^2\theta = Csc^2\theta - 1$$

★ ★ ملاحظة ★ ★ : تحتاج هذه النسب في التفاضل والتكامل (وخاصة في حل المعادلات التفاضلية الاعتيادية والجزئية .

⇦قوانين ضعف الزاوية :

1) $\sin(A+B)=\sin A.\cos B+\sin B.\cos A$

2) $\sin(A-B)=\sin A.\cos B-\sin B.\cos A$

3) $\cos(A+B)=\cos A.\cos B-\sin A.\sin B$

4) $\cos(A-B)=\cos A.\cos B+\sin A.\sin B$

5) $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$, 7) $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

6) $\sin 2\theta=\sin(\theta+\theta)$

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A.\tan B}$$

$$\tan(2\theta)=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

⇦قوانين الاسس :

اذا كان الاساس هو العدد (10) فأن

$(10)^m.(10)^n=10^{m+n}$

$\frac{(10)^m}{(10)^n}=10^{m-n}$ $m\neq n$

$(10^m)^n=10^{m.n}$

$(10^0)=1$

$\sqrt[n]{10^m}=10^{m/n}$

اللوغارتيمات : Log

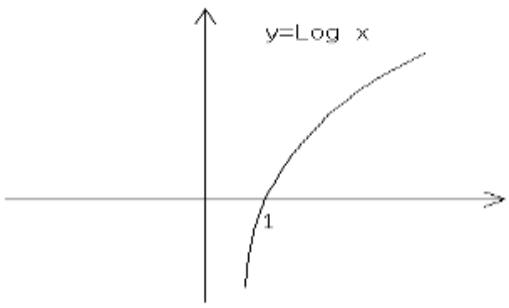
اللوغارتيم : هو قيمة اس الاساس للعدد الاصلي

$8=2^3$ $9=3^2$

$\log_2 8=3$ $\log_3 9=2$

★★ملاحظة ★★ : لايوجد لوغارتيم للعدد السالب .

رسم دالة $y=\log x$



❄انواع اللوغارتيمات❄

العشري (الذي أساسه لعدد 10 والطبيعي لاي عدد طبيعي .

لوغاريتم الاساس e.

◊قوانين اللوغاريتمات◊ :

$$\mathrm{Log}_A(x.y) = \mathrm{Log}_A x - \mathrm{Log}_A y$$

$$\mathrm{Log}_A(x/y) = \mathrm{Log}_A x - \mathrm{Log}_A y$$

$$\mathrm{Log}_A(x^n) = n\,\mathrm{Log}_A x$$

$$\mathrm{Log}_A(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n}\mathrm{Log}_A x \qquad \text{if } n \neq 0$$

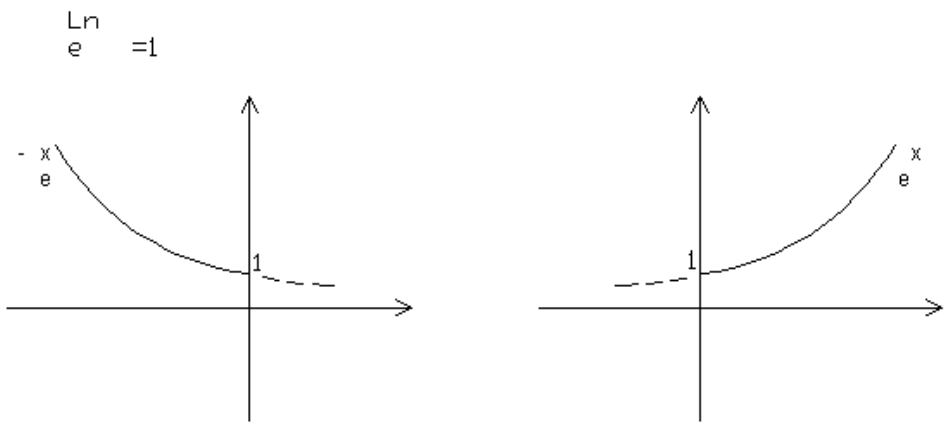
لوغاريتم الاساس e

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+ \qquad \ldots\ldots+\frac{1}{1}\right)$$

$$e = 2.71828 \cong 2.7$$

أي ان e هي معكوس لدالة (Ln)



☀التفاضل والاشتقاق☀

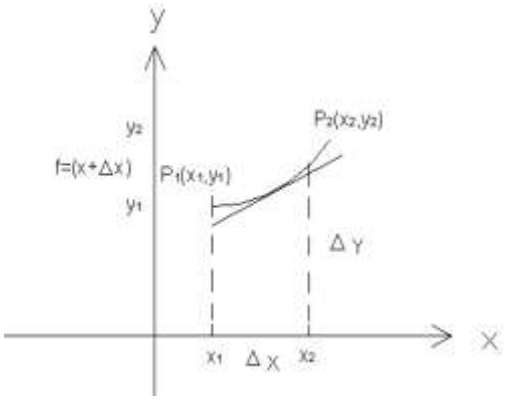
الدالة: هي مجموعة إحداثيات النقاط (x,y) بحيث أن أي تغير يكون في x يحدث في y .

****أنواع الدوال :** Example :✎

الدوال الجبرية	$y = x^2 + 2$
الدوال المثلثية	$y = \sin x + \cos x$
الدوال الآسية	$y = e^{x^2}$
الدوال اللوغارتمية	$y = \ln x^2$
الدوال المركبة	$y = x^2 \sin x + e^x$

✱التفاضل (الاشتقاق) :The Derivative✱

المشتقة : هي ميل المماس لمنحني الدالة أو هو غاية (Limit) معدل التغير لـ y بالنسبة الى المتغير (x) عندما تقترب Δx من الصفر



أيجاد المشتقة :
حسب التعريف
حسب القوانين

قانون أيجاد المشتقة الأولى باستخدام التعريف

المشتقة $\boxed{f'(x) = \underset{\Delta x \to 0}{Limit}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \underset{\Delta x \to 0}{Limit}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$

$$y = f(x)$$
$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$
$$-y \quad = -f(x)$$
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\Delta x \div \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$\therefore y'=\left(\frac{dy}{dx}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$$

$$\therefore y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

✎ **Example :(1)**

جد المشتقة حسب التعريف للدالة $y=x$

حسب القوانين $y=x \quad \Rightarrow y'=1$

Sol. :

$y=f(x)$

أجعل $f(x)=x$

$f(x+\Delta x)=x+\Delta x$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=1$$

$y=x^2 \quad \Rightarrow \quad y'=2x$

$f(x)=x^2$

$f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^2$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^2+2\Delta x.x+(\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x}$$

$$=2x+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=2x$$

☆☆ملاحظة:

يرمز للمشتقة بـ y' أو $f'(x)$ أو $\frac{dy}{dx}$

✎ **Example :(2)**

جد المشتقة للدالة بطريقة التعريف : $f(x)=\sqrt{x}$

القانون: $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

Sol.:

$f(x+\Delta x)=\sqrt{x+\Delta x}$ *and* $f(x)=\sqrt{x}$

نعوض في القانون :

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{(x+\Delta x)}-\sqrt{x}}{\Delta x}$$

نضرب * مرافق البسط ينتج :

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{(x+\Delta x)}-\sqrt{x}}{\Delta x}*\frac{\sqrt{(x+\Delta x)}+\sqrt{x}}{\sqrt{(x+\Delta x)}+\sqrt{x}}$$

$$\therefore f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}$$

$$\therefore f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

تمارين تطبيقية

مشتقة الدالة بطريقة التعريف : Find the derivative by definition:

1) $f(x)=\dfrac{1}{x}$
2) $y=x^2+2x+2$
3) $y=x+5$
4) $y=x^2+8$
5) $y=2\sqrt{x}$
6) $y=3\sqrt{x}+7$

❁❁قوانين مشتقة الدوال الجبرية ❁❁

1) مشتقة الثابت

$$1)\ \frac{d}{dx}(c)=0$$

C= constant

*** أي ان مشتقة الثابت تساوي صفر .**

✎ **Example :(3)**

$y=5$

sol. $\frac{d}{dx}(5)=0 \Rightarrow y'=0(f'(x) \quad y')$

(2

$$2)\ \frac{d}{dx}(x)=1$$

3) مشتقة ثابت * دالة :

$$3)\ \frac{d}{dx}[c\,f(x)]$$

✎ **Example :(4)**

$y=3x^2$

sol. $y'=6x$

4) مشتقة دالة مرفوعة الى قوى

$$4)\ \frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$$

Example :(5)

$y=x^3 \qquad \Rightarrow \qquad y'=3x^2$

5) مشتقة جمع او طرح دالتين :

$$5)\ \frac{d}{dx}[f(x)\mp g(x)]=f'(x)\mp g'(x)$$

✎ **Example :(6)**

$y=f(x)=2x^2+4x+5$

sol. $y'=f'(x)=4x+4$

6) **مشتقة حاصل ضرب دالتين** :

$$6)\ \frac{d}{dx}[f(x)\cdot g(x)]=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

أي ان مشتقة ضرب دالتين = مشتقة الاول * الثاني + الأول * مشتقة الثاني

✎ **Example :(7)**

جد المشتقة للمقدار التالي

$y = x^2\sqrt{4-x}$

$sol.\quad y = x^2(4-x)^{1/2}$

$\frac{dy}{dx} = 2x.(4-x)^{1/2} + x^2.\frac{1}{2}(4-x)^{1/2}.-1 \longleftarrow$ (مشتقة –x مشتقة داخل القوس)

$\therefore \frac{dy}{dx} = 2x.\sqrt{4-x} - \frac{x^2}{2\sqrt{4-x}}$

---

7) مشتقة القسمة Division

$$7)\ \frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)\cdot g(x) - g'(x)\cdot f(x)}{[g(x)]^2}$$

*** أي ان مشتقة القسمة تساوي : مشتقة البسط * المقام مطروحاً منه مشتقة المقام * البسط على مربع المقام**

✎ **Example :(8)**

جد مشتقة الدالة

$y = \frac{x^2-1}{x}$

$sol.\ y' = \frac{(2x).x-(1).(x^2-1)}{x^2}$

$= \frac{(2x^2-x^2+1)}{x^2} = \frac{x^2+1}{x^2}$

$$8)\ \frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1}g'(x)$$

أي ان مشتقة القوس يساوي مشتقة القوس * مشتقة داخل القوس

✎ **Example :(9)**

$f(x) = (x^4+2)^3$

$sol.\ f'(x) = 3(x^4+2)^2.(4x^3)$

$= 12x^3(x^4+2)^2$

✎ **Example :(10)** Find the derivatives for the following functions:

جد المشتقة للدوال التالية :

$1)\ y = x^4 + 3x + 5$

$sol.\quad y' = \frac{dy}{dx} = 4x^3 + 3 + 0$

$\therefore y' = 4x^3 + 3$

$$2)\ y = 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2} + 2x^5$$

$$\text{sol.}\quad y = 2x^{1/2} + (x^2)^{1/3} + 2x^5$$

$$y = 2x^{1/2} + x^{2/3} + 2x^5$$

$$\therefore\quad y' = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{-1/2} + \frac{2}{3}x^{-1/3} + 10x^4$$

$$\therefore\quad y' = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + 10x^4$$

$$\frac{2}{3} - 1 = \frac{2}{3} - \frac{3}{3} = \frac{2-3}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$3)\ y = \sqrt[3]{3x^2} - \frac{1}{\sqrt{5x}}$$

$$\text{sol.}\quad y = \sqrt[3]{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot x^{-1/2}$$

$$y' = \sqrt[3]{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{-1/3} - \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot -\frac{1}{2}x^{-3/2}$$

$$\therefore\quad y' = \frac{2\sqrt[3]{3}}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt[2]{x^3}}$$

$$\frac{2}{3} - 1 = \frac{2}{3} - \frac{3}{3} = \frac{2-1}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} - \frac{2}{2} = \frac{-1-2}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$4)\ y = \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{6}{\sqrt{x^3}}$$

$$\text{sol.}\quad y = 3\cdot x^{-\frac{1}{2}} - 2\cdot x^{-\frac{2}{3}} + 6\cdot x^{-\frac{3}{2}}$$

$$\therefore\quad y' = 3\cdot -\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{3}{2}} - 2\cdot -\frac{2}{3}\cdot x^{-\frac{5}{3}} + 6\cdot -\frac{3}{2}\cdot x^{-\frac{5}{2}}$$

$$\therefore\quad y' = -\frac{3}{2\cdot\sqrt{x^3}} + \frac{4}{3\sqrt[3]{x^5}} - \frac{9}{\sqrt[2]{x^5}}$$

$$5)\ s = (t^2 - 3)^4$$

$$\text{sol.}\ V = \frac{ds}{dt} = 4(t^2 - 3)^3\cdot 2t$$

$$\therefore \frac{ds}{dt} = 8t((t^2 - 3)^3$$

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow a:\text{التعجيل}$$

S= المسافة ، t= الزمن ، V = السرعة ، a= التعجيل

$6)\ y=\sqrt{x^2+6x-3}$

sol. $y=(x^2+6x-3)^{\frac{1}{2}}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(x^2+6x-3)^{-\frac{1}{2}}(2x+6)$ ⟵ مشتقة داخل القوس

$\therefore y'=\frac{1}{2}\cdot 2(x+3)(x^2+6x-3)^{-\frac{1}{2}}$

$=\frac{x+3}{\sqrt{x^2+6x-3}}$

*** مشتقة حاصل ضرب دالتين**

$7)\ y=(x^2+2)(2x^3-1)^3$

sol. $\frac{dy}{dx}=(x^2+2)\cdot 3(2x^3-1)^2\cdot 6x^2+(2x^3-1)^3\cdot 2x$

$\therefore y'=18x^2(x^2+2)(2x^3-1)^2+2x(2x^3-1)^3$

مشتقة القسمة

$8)\ Z=\frac{2t-3}{3t^2-1}$

sol. $Z'=\frac{2(3t^2-1)-6t(2t-3)}{(3t^2-1)^2}=\frac{6t^2-2-12t^2+18t}{(3t^2-1)^2}$

$\therefore\quad Z'=\frac{-6t^2+18t-2}{(3t^2-1)^2}$

$9)\ y=\frac{x^2}{\sqrt{4-2x^2}}$

sol. $\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{4-2x^2}\cdot 2x-x^2\cdot\frac{1}{2}(4-2x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot -4x}{(\sqrt{4-2x^2})^2}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{2x\sqrt{4-2x^2}+2x^3(4-2x^2)^{-\frac{1}{2}}}{(4-2x^2)}$

★★ملاحظة★★ : يمكن حل السؤال اعلاه بطريقة مشتقة حاصل ضرب دالتين :
ترتيب المعادلة كالأتي :

$$y = x^2(4-2x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = x^2 \cdot -\frac{1}{2}(4-2x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot -4x + (4-2x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x$$

$$= \frac{2x^3}{\sqrt{(4-2x^2)^3}} + \frac{2x}{\sqrt{4-2x^2}}$$

مشتقة الدالة المركبة (قاعدة السلسلة) Chain Rule

اذا كانت

$$y = u^2 - 1 \qquad .....(1)$$

$$u = 3x^2 - x \qquad .....(2)$$

نوجد مشتقة الاول (1)

نوجد مشتقة الثاني (2)ثم نوجد المشتقة $\frac{dy}{dx}$ كالاتي:

قاعدة سلسلة واحدة Chain Rule

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

مشتقة معادلة:-

$$\frac{dy}{du} = 2u \qquad .....(1)$$

$$\frac{du}{dx} = 6x - 1 \qquad .....(2)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = 2u(6x-1) \qquad .....(3)$$

نعوض عن قيمة u من معادلة (2) في معادلة (3) يتبع :

$$y' = 2 \cdot [(3x^2 - x)(6x-1)]$$

$$= 2 \cdot [18x^3 - 3x^2 - 6x^2 + x]$$

$$= 2 \cdot [18x^3 - 9x^2 + x]$$

$$= 36x^3 - 18x^2 + 2x$$

---

2)if: $y = x^2 - 4x$

$x = \sqrt{2t^2+1}$; Find $\frac{dy}{dt}$

sol. $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$

$y = x^2 - 4x \quad \Rightarrow \therefore \frac{dy}{dx} = 2x - 4$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(2\sqrt{2t^2+1} - 4) \cdot 2t}{\sqrt{2t^2+1}}$$

$$x=(2t^2+1)^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \therefore \frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}(2t^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 4t$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dt}=(2x-4)\cdot\frac{1}{2}(2t^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 4t$$

$$\therefore \quad y'=(2x-4)(2t^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2t$$

---

3) $y=\dfrac{u^2-1}{u^2+1}$ and $u=\sqrt[3]{x^2+2}$

Find: $\dfrac{dy}{dx}$

sol. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$

$$\therefore \frac{dy}{du}=\frac{(u^2+1)\cdot 2u-(u^2-1)\cdot 2u}{(u^2+1)^2}=\frac{4u}{(u^2+1)^2}$$

$$u=\sqrt[3]{x^2+2}=(x^2+2)^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{3}(x^2+2)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{(u^2+1)\cdot 2u-(u^2-1)\cdot 2u}{(u^2+1)^2}\cdot\frac{2}{3}x(x^2+2)^{-\frac{2}{3}}$$

$$=\frac{8}{3}\cdot\frac{u}{(u^2+1)^2}\cdot\frac{x}{\sqrt[3]{(x^2+2)^2}}=\frac{8x\sqrt[3]{(x^2+2)}}{3(\sqrt[3]{(x^2+2)^2}+1)^2}*\frac{x}{\sqrt[3]{(x^2+2)^2}}$$

---

4) $y=u^3+u$

$u=x^2+2x$

Find $\dfrac{dy}{dx}$

sol. $\dfrac{dy}{du}=3u^2+1$ and $\dfrac{du}{dx}=2x+2$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=(3u^2+1)(2x+2)$$

$$=(3(x^2+2x)^2+1)(2x+2)$$

✍ **تمارين تطبيقية:**

Find: $\frac{dy}{dx}$

1) $y=\sqrt{2x}-\sqrt{x}$

2) $y=(x-1)\sqrt{x^2-2x+2}$

3) $y=\sqrt{1+\sqrt{x}}$

4) $y=\frac{u-1}{u+1}$ and $x=\sqrt{u}$

5) $y=\left(\frac{x^3-1}{x^2+1}\right)^4$

6) $y=u^3+u$ $\qquad$ $u=x^2+2x$

$\Rightarrow \frac{dy}{du}=3u^2+1$ $\qquad$ $\Rightarrow \frac{du}{dx}=2x+2$

7) $y=(1+u^2)^3$, $x=u^2$, $x=1$ Ans : sol=12

♠مشتقة الدالة الضمنية♠ :

هي مشتقة كل متغير ، وكل مشتقة بالنسبة لـ y تكون مضروبة بـ ' y او $\frac{dy}{dx}$

✎ **Example:(1)** $Find: \frac{dy}{dx}$

تفيد في حل المعادلات التفاضلية

1) $xy^2+x^2y=1$

sol. $x\cdot 2y\cdot y'+y^2\cdot 1+x^2\cdot y'+y\cdot 2x=0$

$(2xy+x^2)\,y'+(y^2+2xy)=0$

$(2xy+x^2)\,y'=-(y^2+2xy)$

$\therefore y'=\frac{-(y^2+2xy)}{(2xy+x^2)}$

✎ **Example :(2)** Find: $\frac{dy}{dx}$, (y')

$2)\ x^2y - xy^2 + x^2 + y^2 = 0$

sol. $x^2 \cdot y' + y \cdot 2x - (x \cdot 2y \cdot y' + y^2 \cdot 1) + 2x + 2y \cdot y' = 0$

$x^2 \cdot y' + 2xy - 2xy \cdot y' - y^2 + 2x + 2y \cdot y' = 0$

$(x^2 - 2xy + 2y)\ y' = y^2 - 2xy - 2x$

$\therefore y' = \frac{(y^2 - 2xy - 2x)}{(x^2 - 2xy + 2y)}$

✎ **Example :(3)** Find: y', y''

$3)\ x^2 - xy + y^2 = 3$

sol. $2x - (x \cdot y' + y \cdot 1) + 2y \cdot y' = 0$

$y'(2y - x) + (2x - y) = 0$

$\therefore y' = \frac{-2x + y}{2y - x}$

$y'' = \frac{(2y - x)(-2 + y') - (-2x + y)(2y' - 1)}{(2y - x)^2}$

✍ **تمارين تطبيقية:** (H.W)

1) $xy^3 + x^3y = 2$ Find: y', y''

2) $x^2y^2 + 5xy + y^2 = 5$

3) $xy + x^2y^2 + x^3y^3 + x^2 = 0$

4) $y^3x^2 + x^3y + xy = 1$

5) $x^2y^4 + x^4 \cdot y^2 + x^2 \cdot y = 4$

6) $y = e^{\ln y^2} + y \ln x^2$

7) $\cos y - \sin^3 x^2 - y^3 - x^2 = 6$

8) $\cos^2 y - \frac{\sqrt{X}}{2\sin\sqrt{x}} = \frac{1}{y} + \tan^{-1} x$

9) $\tan^3 y - y\cos x = \frac{1}{2}\sin^2\sqrt{x} + \frac{1}{x^2}$

10) $2 + \ln y = 2^{\ln x} + e^{5x}$

❋مشتقة الدوال المثلثية❋:

لتكن u دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة الى x

مشتقة الزاوية u بالنسبة الى x

$$1)\ \frac{d(\ Sinu)}{dx}=Cosu(\ \frac{du}{dx})$$

$$2)\ \frac{d(\ Cosu)}{dx}=-Sinu\cdot\frac{du}{dx}$$

$$3)\ \frac{d(\ tanu)}{dx}=Sec^2\ u(\ \frac{du}{dx})$$

$$4)\ \frac{d(\ Cotu)}{dx}=-Csc^2\ u(\ \frac{du}{dx})$$

$$5)\ \frac{d(\ Secu)}{dx}=Secu\cdot tanu(\ \frac{du}{dx})$$

$$6)\ \frac{d(\ Cscu)}{dx}=-Cscu\cdot Cotu(\ \frac{du}{dx})$$

✎ **Example :(1)**

$$y=Sin(\ 3x)$$
$$y'=Cos(\ 3x)\ .3$$
$$=3Cos(\ 3x)$$

✎ **Example :(2)**

$$y=Sin(\ 4x^2+x)$$
$$=Cos(\ 4x^2+x)\ .(\ 8x+1)$$
$$=(\ 8x+1)(\ Cos(\ 4x^2+x)\ )$$

✎ **Example :(3)**

$$y=Cos(\ \sqrt{x})$$
$$=-Sin(\ \sqrt{x})\cdot\frac{1}{2}x^{-1/2}$$
$$=-\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot Sin(\ \sqrt{x})$$

✎ **Example :(4)**

$$y=\sqrt[3]{Cosx}$$

مشتقة قوس

$$y=(\ Cosx)^{1/3}$$
$$y'=\frac{1}{3}(\ Cosx)^{-2/3}\cdot -Sinx\cdot 1$$

✎ **Example :(5)**

$$y = \tan(x^2)$$
$$= \sec^2(x^2)\ .2x$$
$$= 2x \cdot \sec^2(x^2)$$

✎ **Example :(6)**

$$y = \tan(\sqrt{x^2+4})$$
$$y = \tan((x^2+4)^{1/2})$$
$$\therefore y' = \sec^2((x^2+4)^{1/2}) \cdot \frac{1}{2}(x^2+4)^{-1/2} \cdot 2x$$
$$= \frac{x}{(\sqrt{x^2+4})} \cdot \sec^2(\sqrt{x^2+4})$$

✎ **Example :(7)**

$$y = \sqrt{\tan(\sqrt{x})}$$
$$y = (\tan(x)^{1/2})^{1/2}$$
$$\therefore y' = \frac{1}{2}(\tan(x)^{1/2})^{-1/2} \cdot \sec^2(x)^{1/2}) \cdot \frac{1}{2}x^{-1/2}$$
$$= \frac{\sec^2(\sqrt{x})}{4\sqrt{x}(\sqrt{\tan\sqrt{x}})}$$

✎ **Example :(8)**

$$y = \cot(x^2+5x)$$
$$= -\csc^2(x^2+5x)(2x+5)$$
$$= -(2x+5) \cdot \csc^2(x^2+5x)$$

✎ **Example :(9)**

$$y = \cot(\sqrt[3]{x^2+5x+1})$$
$$y = \cot((x^2+5x+1)^{1/3})$$
$$= \frac{(-(2x+5) \cdot \csc^2(\sqrt[3]{x^2+5x+1})}{3\sqrt[3]{(x^2+5x+1)^2}}$$

✎ **Example :(10)**

$$y = \sec(x^3)$$
$$= \sec(x^3) \cdot \tan(x^3) \cdot 3x^2$$
$$= 3x^2 \cdot \sec(x^3) \cdot \tan(x^3)$$

Example :(11)

$$y = \text{Sec}(\sqrt{x^3})$$
$$= \text{Sec}(x^{3/2})$$
$$\therefore y' = \text{Sec}(x^{3/2}) \cdot \tan(x^{3/2}) \cdot \frac{3}{2}(x^{1/2})$$
$$= \frac{3\sqrt{x}}{2} \cdot \text{Sec}(\sqrt{x^3}) \cdot \tan(\sqrt{x^3})$$

Example :(12)

$$y = \text{Csc}(2x^5)$$
$$\therefore y' = -\text{Csc}(2x^5) \cdot \text{Cot}(2x^5) \cdot 10x^4$$
$$= -10x^4 \cdot \text{Csc}(2x^5) \cdot \text{Cot}(2x^5)$$

Example :(13)

$$y = \text{Sin}3x + \text{Cos}3x$$
$$= \text{Cos}3x \cdot 3 - \text{Sin}3x \cdot 3$$
$$= 3(\text{Cos}3x - \text{Sin}3x)$$

Example :(14)

$$y = x^2 \text{Sin}x$$
$$= x^2 \cdot \text{Cos}x \cdot 1 + \text{Sin}x \cdot 2x$$

Example :(15)

$$y = \tan^2(3x^2 - x)$$
$$\therefore y' = 2\tan(3x^2 - x) \cdot \text{Sec}^2(3x^2 - x)(6x - 1)$$
$$= (12x - 2) \cdot \tan(3x^2 - x) \cdot \text{Sec}^2(3x^2 - x)$$

متشقة داخل الزاوية

الدالة هي دالة ضمنية

Example :(16)

$$y = \text{Sin}(x + y)$$
$$\therefore y' = \text{Cos}(x + y)(1 + y')$$
$$y' = \text{Cos}(x + y) + y'\text{Cos}(x + y)$$
$$y' - y'\text{Cos}(x + y) = \text{Cos}(x + y)$$
$$y' = \frac{\text{Cos}(x + y)}{(1 - \text{Cos}(x + y))}$$

if $\quad \text{Siny} - \text{Cosx} = 1 \qquad$ Find y', y''

$$\text{Cosy}.y' + \text{Sinx}.1 = 0$$

$$y'\,\text{Cosy} = -\text{Sinx}$$

$$\therefore \quad y' = \frac{-\text{Sinx}}{\text{Cosy}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\text{Sinx}}{\text{Cosy}}$$

$$y'' = \frac{\text{Cosy}.-\text{Cosx} + \text{Sinx}.-\text{Siny}.y'}{(\text{Cosy})^2}$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\text{Cosy}.\text{Cosx} - \text{Sinx}.\text{Siny}.(\frac{-\text{Sinx}}{\text{Cosy}})}{(\text{Cosy})^2}$$

---

if $\quad y = \text{Sin x} + 2\text{Cos x}$

Prove $\quad y''' + y'' + y' + y = 0$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\text{Cos y}.y' + \text{Sin x}.1 = 0$$

$$y' = \text{Cos x} - 2\text{Sin x}$$

$$\therefore \quad y'' = -\text{Sin x} - 2\text{Cos x} \qquad \Rightarrow \text{Sum} = 0$$

$$y''' = -\text{Cos x} + 2\text{Sin x}$$

$$\text{Sinx} + 2\text{Cos x} + \text{Cos x} - 2\text{Sinx} - 2\text{Sinx} - \text{Sinx} - 2\text{Cos x} - \text{Cos x} + 2\text{Sinx} = 0$$

الدوال المثلثية العكسية

اذا كانت

$x = \text{Siny}$

then $y = \text{arc Sinx}$

Or $\quad y = \text{Sin}^{-1}x$

وكذلك بالنسبة الى

$y = \text{arcCosx}$

$y = \text{Cos}^{-1}x$

قواعد الاشتقاق:

$$1)\ \frac{d(\ \sin^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$2)\ \frac{d(\ \cos^{-1} u)}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$3)\ \frac{d(\ \tan^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$4)\ \frac{d(\ \cot^{-1} u)}{dx} = \frac{-1}{1+u^2} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$5)\ \frac{d(\ \sec^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$6)\ \frac{d(\ \csc^{-1} u)}{dx} = \frac{-1}{u\sqrt{u^2-1}} \cdot \frac{du}{dx}$$

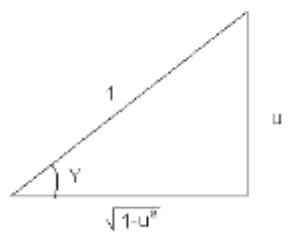
جميع هذه الاشتقاقات تفيد في طرق التكامل وخاصة بطريقة التعويض
ويمكن برهنتها من خلال $u = Sin\ y$
من نظرية فيثاغورس

$$[\sin^{-1} u = y] * \sin u$$

$$\sin y = \frac{u}{1}$$

$$\therefore u = \sin y$$

$$\frac{du}{dx} = \cos y . \frac{dy}{dx}$$



$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} . \frac{du}{dx}$$

$$\because \cos y = \frac{\sqrt{1-u^2}}{1}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} . \frac{du}{dx}$$

✎ **Example :(1)**

$$y = \sin^{-1} x$$

$$\therefore y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} . 1$$

✎ **Example :(2)**

$$y = \cos^{-1}(2x)$$

$$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-(2x)^2}}.2$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{1-4x^2}}$$

✎ **Example :(3)**

$$y = \tan^{-1}(3x)$$

$$y' = \frac{1}{1+(3x)^2}.3 = \frac{3}{1+9x^2}$$

✎ **Example :(4)**

$$y = \cot^{-1}(5x)$$

$$\therefore y' = \frac{-1}{1+(5x)^2}.5$$

✎ **Example :(5)**

$$y = \sec^{-1}(4x)$$

$$y' = \frac{1}{4x\sqrt{(4x)^2-1}}.4 = \frac{1}{x\sqrt{16x^2-1}}$$

✎ **Example :(6)**

$$y = \csc^{-1}(4x)$$

$$= \frac{-1}{4x(\sqrt{(4x)^2-1})}\cdot 4 = \frac{-1}{x(\sqrt{16x^2-1})}$$

✎ **Example :(7)**

$$y = \text{arc}\cos(x^2)$$

$$\therefore y = \cos^{-1}x^2$$

$$\therefore y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^4}}.2x$$

4- اشتقاق دالة Log

صيغة القانون مشتقة الدالة * $(\text{Log})' = \frac{1}{_____}$

الأساس Ln * الدالة

✎ **Example:**

1- $y = Log_7\ x^3$

$$y' = \frac{1}{x^3.Ln7} * 3x^2 = \frac{3x^2}{x^3.Ln7} = \frac{3}{x.Ln7}$$

2- $y = Log_5\ \tan x^2$

$$y' = \frac{1}{\tan x^2.Ln5} * Sec^2 x^2 * 2x$$

3- $y = Log_8\ x^4$

$$y' = \frac{1}{x^4 * Ln8} * 4x^3 = \frac{4x^3}{x^4 * Ln8} = \frac{4}{xLn8}$$

4- $y = Log_{10}\ x^7$

$$y' = \frac{1}{x^7.Ln10} * 7x^6 = \frac{7x^6}{x^7.1} = \frac{7}{x}$$

5- $y = Log_2\ X^8$

$$y' = \frac{1}{x^8 * Ln2}.8x^7 = \frac{8x^7}{x^8 * Ln2} = \frac{8}{xLn2}$$

6- $y = Log_e\ x$

$$y' = \frac{1}{x.Lne}.1 = \frac{1}{x}$$

※مشتقة الدوال اللوغارتمية والأسية※ :

1) $\frac{d}{dx}(Lnu) = \frac{1}{u}.\frac{du}{dx}$

2) $\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \cdot \frac{du}{dx}$

3) $\frac{d}{dx}(a^u) = a^u \cdot Ln a \cdot \frac{du}{dx}$

✎ **Example :(1)**

$y = 3^{x^2}$

$\therefore y' = 3^{x^2} \; Ln 3 \; .2x$

$= 2x \, Ln 3 . 3^{x^2}$

✎ **Example :(2)**

$y = 4^{x^3}$

$y' = 4^{x^3} \; . \; Ln 4 .(3x^2)$

✎ **Example :(3)**

$y = 4^{\tan x}$

$y' = 4^{\tan x} .Ln 4 .Sec^2 x$

✎ **Example :(4)**

$y = Ln(x^2 + 1)$

$\therefore y' = \frac{1}{(x^2 + 1)} .2x$

✎ **Example :(5)**

$y = Ln(Sec\sqrt{x})$

$y' = \frac{1}{Sec\sqrt{x}} .Sec\sqrt{x} . \tan\sqrt{x} . \frac{1}{2} x^{-1/2}$

✎ **Example :(6)**

$y = e^{x^2}$

$y' = e^{x^2} .2x$

✎ **Example :(7)**

$y = Cos x .Ln x^2$

$y' = Cos x . \frac{1 * 2x}{x^2} - Sin x . Ln X^2$

$= \frac{2}{x} Cos x - Sin x . Ln x^2$

✎ **Example :(8)**

$y = e^{\tan x}$

$y' = e^{\tan x}.\mathrm{Sec}^2 x$

✎ **Example :(9)**

$y = 7e^{x^3}$

$y' = 7.e^{x^3}.3x^2$

$= 21.x^2.e^{x^3}$

✎ **Example :(10)**

$y = e^{\mathrm{Ln}x^2} \qquad = 1^{x^2}$

$= 1^{x^2}\ \mathrm{Ln}1.2x = 0$

✎ **Example :(11)**

$y = 7^{x^5}$

$= 7^{x^5}.\ \mathrm{Ln}7.\ 5x^4$

✎ **Example :(12)**

$y = \mathrm{Ln}x^2.e^{x^2}$

$= \mathrm{Ln}x^2.e^{x^2}.\ 2x + e^{x^2}.\frac{1}{x^2}.\ 2x$

☯**معادلة القطع الناقص Hyparabollar**☯

$\mathrm{Sinh}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\mathrm{Cosh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$\mathrm{Cosh}^2 x - \mathrm{Sinh}^2 x = 1$

1) $\frac{d(\ \mathrm{Sinh}x)}{dx} = \mathrm{Cosh}x$

2) $\frac{d(\ \mathrm{Cosh}x)}{dx} = \mathrm{Sinh}x$

3) $\frac{d(\ \tanh x)}{dx} = \mathrm{Sech}^2 x$

4) $\frac{d(\ \mathrm{Coth}x)}{dx} = -\mathrm{Csch}^2 x$

5) $\frac{d(\ \mathrm{Sech}x)}{dx} = -\mathrm{Sech}x \cdot \tanh x$

---

6) $\frac{d(\ Csch x)}{dx} = -Csch x \cdot Coth x$

تفيد هذه الاشتقاقات في حل المعادلات التفاضلية وحلولها في المراحل المتقدمة.

$$\text{Ex (1): show that : } \frac{d}{dx}(\text{Sinh } x) = \text{Cosh } x$$

$$y = \text{Sinh}x = \frac{(e^x - e^{-x})}{2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(e^x + e^{-x})}{2} = \text{Cosh } x$$

$$\text{Ex (2): show that : } \frac{d}{dx}(\text{Cosh } x) = \text{Sinh } x$$

$$y = \text{Cosh}x = \frac{(e^x + e^{-x})}{2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(e^x - e^{-x})}{2} = \text{Sinh } x$$

$$\text{Ex (3): Find } \frac{dy}{dx} \text{ of the folloing function: } -$$

$$1.\ y = \text{Sinh}(x^2 + 7x + 12)$$

$$\frac{dy}{dx} = \text{Cosh}(x^2 + 7x + 12).(2x + 7)$$

$$2.\ y = \text{Cosh}^6(17 - 4x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = 6\text{Sinh}^5(17 - 4x^2).\text{Cosh}(17 - 4x^2).(-8x)$$

$$= -48x\text{Sinh}^5(17 - 4x^2).\text{Cosh}(17 - 4x^2)$$

$$3.\ y = x^2\text{Sech } 8x$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2\text{Sech } 8x \tanh 8x.8 + \text{Sech}8x.2x$$

$$4.\ y = \tanh\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \text{Sech}^2\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\left[\frac{(1-x)-(1+x).(-1)}{(1-x)^2}\right]$$

$$= \text{Sech}^2\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\left(\frac{2}{(1-x)^2}\right)$$

$$5.\ y = \frac{\sqrt{3}}{x+1}\text{Coth } (2x - 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sqrt{3}}{x+1}\text{Csch}^2(2x + 1).2 + \text{Coth } (2x - 1)\frac{-\sqrt{3}}{(x+1)^2}$$

$$6.\ y = \text{Csch}(e^x + \ln(x + 1))$$

$$\frac{dy}{dx} = -\text{Csch}\left(e^x + \ln(x+1)\right).\text{Coth}\left(e^x + \ln(x+1)\right).\left(e^x + \frac{1}{(x+1)}\right)$$

Ex (4): Given that $\text{Sinh}x = -\frac{3}{4}$, Find Coshx

sol: since $\text{Cosh}^2x = 1 + \text{Sinh}^2x = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}$

$\therefore \text{Cosh } x = \pm\frac{5}{4}$, we get $\text{Cosh}x\frac{5}{4}$

<u>تمارين تطبيقية :-</u>

Exc: $\frac{dy}{dx}$ of $y = \sqrt[3]{\text{Sinh}(\cos^{-1}\sqrt{1 - \ln(x + \sin x)}}$

Exc: $\frac{dy}{dx}$ of $y = \tanh^4 (x^5 - 5x)^2$

Exc: $\frac{dy}{dx}$ of $y = csch(\sqrt{x^3} - x^2)^6$

Exc: $\frac{dy}{dx}$ of $y = coth^2\sqrt{1 - x^3}$

Exc: $\frac{dy}{dx}$ of $y = sinh(cosh\, x^3)$

Exc: $\frac{dy}{dx}$ of $y = \text{sech}\left(6 - 6x^6\right) + coth\left(6 - 6x^6\right)$

♧تطبيقات التفاضل♧ /♧ رسم الدوال ♧

$f(X)=y$ وهي دالة خطية

1) لرسم الدالة $f(x)=2x$ **وهي دالة خطية**

نعطي قيم الى x لاستخراج قيم المتغير y

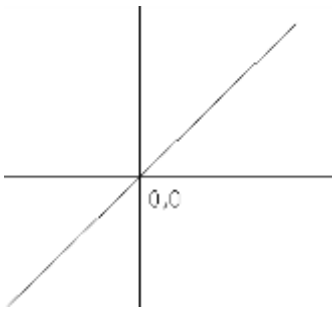
$\boxed{f(x)=2x}$

$\therefore y=2x$

التعويض يكون في الدالة $y=2x$

لاستخراج النقاط حسب الجدول $\Leftarrow$

X	Y
0	0
1	2
2	4
-2	-4
3	6
-3	-6



$y'=2$

$let\ y'=0$

$2\neq 0$

لا توجد نقاط انقلاب للدالة لانها دالة خطية

✎ **Example(1) :**

أرسم الدالة $f(x)=x^2$

$Sol.\Rightarrow y=x^2$

لإيجاد نقاط الانقلاب (النهايات العظمى والصغرى للمشتقة)

$y=f(x)=x^2$

$f'(x)=2x$

$let f'(x)=0$

$\therefore 0=2x$

$\therefore x=0\Rightarrow y=0$

(0،0)نقطة انقلاب مرشحة

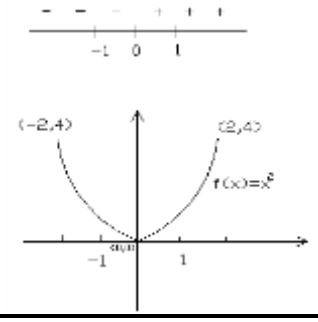
النقطة المرشحة (0،0)

$f'(x)\leftarrow +$ **الى – تكون نهاية عظمى**

$f'(x)\leftarrow -$ **الى + تكون نهاية صغرى**

*** لاتوجد نهاية عظمى او صغرى عندما** $x=x_0$ **اذا لم تتغير اشارتها**

الدالة نهاية نهاية صغرى عند (0،0)



x	y
0	0
1	1
-1	1
2	4
-2	4

Example(2) :

x	y
0	0
1	1
1	-1
4	2
4	-2

$x = y^2$ $\qquad$ $X = 4py^2$

$\Rightarrow f(\ y) = y^2$ $\qquad$ $p = 1/4$

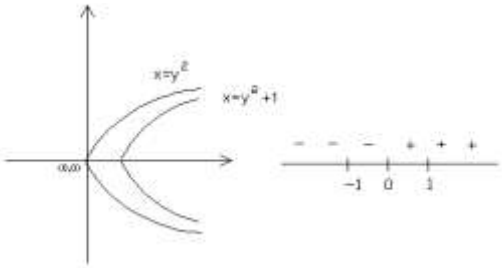
$f'(\ y) = 2y$

$\text{let} f'(\ y) = 0$

$\Rightarrow 2y = 0$

$\therefore y = 0$

$\therefore x = 0$



هي النقطة المرشحة (0،0)
نعوض في المشتقة

Example(3) :

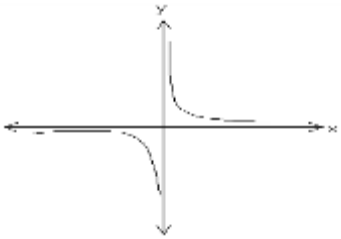
$y = \frac{1}{x}$

$\therefore f(\ x) = \frac{1}{x}$

$f'(\ x) = -\frac{1}{x^2}$

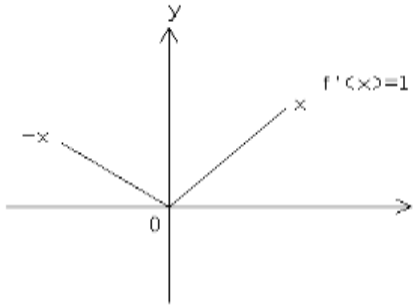
$\text{let} f'(\ x) = 0$

$\therefore -\frac{1}{x^2} = 0$



***عن التعويض عن قيم (x) تكون جميع القيم موجبة ماعدا الصفر يجعل الدالة غير معرفة (∞)**
نعمل جدول بالقيم ويكون الرسم بالشكل أعلاه.

✎ Example(4) :



$$f(x)=|x|$$
$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} x \Rightarrow x>0 \\ -x \Rightarrow x<0 \\ 0 \Rightarrow x=0 \end{cases}$$
$$f'(x)=1$$

∴ الدالة زاوية حادة أي لاتحتوي على نقاط انقلاب الدالة تعاني من حالة أنكسار عند (0,0)

* نعمل جدول لاستخراج قيم (x,y)ثم نرسم الدالة

✎ Example(5) :

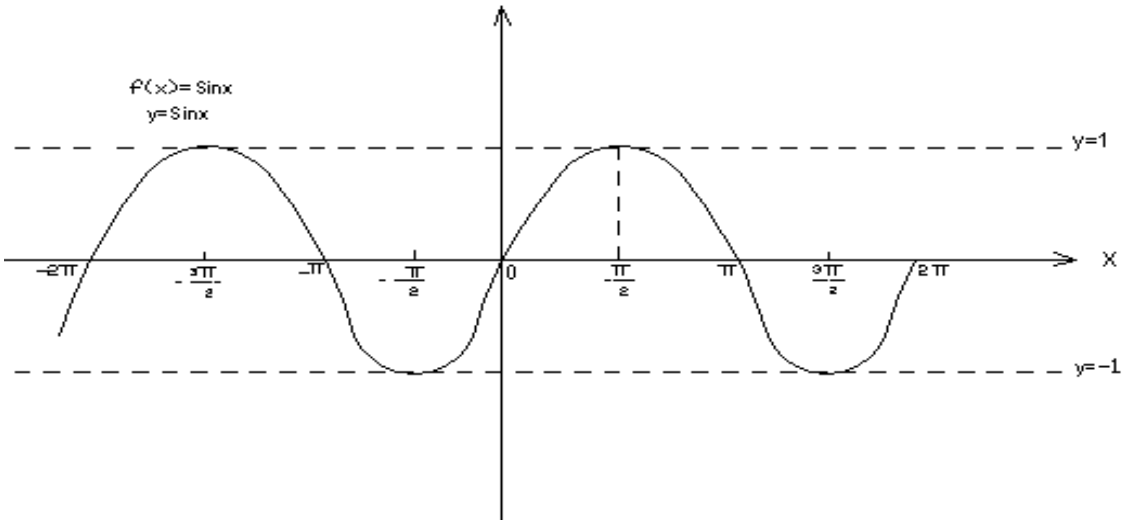
رسم الدوال المثلثية

$y = Sin\,x$

$y = Sin\,x \qquad \pi = 180°$

$\Rightarrow f(x) = Sin\,x \quad -1 \le y \le 1$

$y = 1 \qquad\qquad -2\pi \le x \le 2\pi$



* اذا تحققت : $0 \le x \le 2\pi$

*نستخرج قيم $y = Sinx$ من الجدول او الحاسبة بحيث ان :

$Sin\pi/2 = 1$

$Sin0 = 0$

$Sin\pi = 0$

$Sin3\pi/2 = -1$

✎ **Example(6) :**

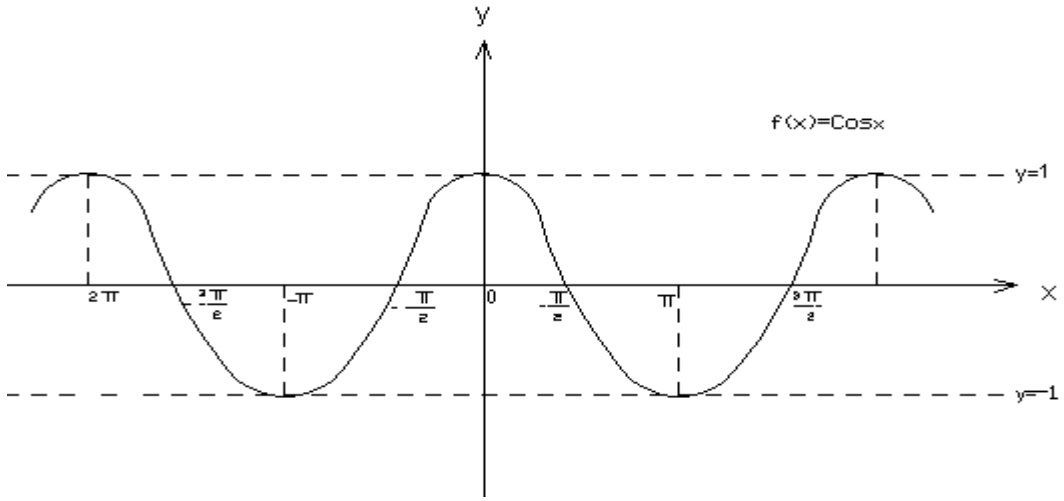
$y = Cosx$

$y = Cosx$

$f(\ x) = Cos$

$0 \le x \le 2\pi$

$-1 \le y \le 1$



*بنفس الطريقة نستخرج قيم $y = Cos\,x$ كالتالي :

$Cos0 = 1$

$Cos\pi/2 = 0$

$Cos(-\pi/2) = 0$

$Cos\pi = -1$

$Co\$\ -\pi \cong -1$

$Cos2\pi = 1$

$Cos(\ -2\pi = 1$

تمارين تطبيقية:

أوجد تفاضل (اشتقاق) الدوال التالية :

1) $y = \sin(x+y)^2$

2) $\tan y - \sec x = 5$ Find y' , y''

3) $y = -\sec^2 x + \tan x$ Find $y^{(5)}$

4) $y = \arcsin(5x^3)$

5) $y = \arccos(x^2-1)^2$

6) $y = \tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$

7) $y = \operatorname{arcsec}\left(\frac{5}{3}x^{\frac{1}{5}}\right)$

8) $y = \cot^{-1}(1-x^3)^2$

9) $y = \csc^{-1}(\sqrt{1-x^3})$

10) $y = e^{2\sqrt{x}}$

11) $y = e^{(x^2-1)^3}$

12) $y = e^{\sin x^3}$

13) $y = \ln(x+1)^3$

14) $y = \ln(4+x)^2$

15) $y = \ln(5x^2+6)^{1/3}$

16) $y = 10^{x^7}$

17) $y = 100^{x^5}$

18) $y = 1^{(x+2)^3}$

19) $y = \operatorname{sech}(7x^3)$

20) $y = \coth(\sqrt[3]{x^2+5})$

21) $y = \log_{100} x^7 + \log_{100} x^6 - \log_8 \sqrt{x}$

22) $y = 8^{x^{20}} + e^{x^{20}} - \ln x^{20}$

تمارين تطبيقية:

Q1: Find the derivatives of the following function using the definition

أوجد المشتقة حسب التعريف

1) $y = x^2 - x$

2) $y = \frac{3}{5x}$

3) $y = x^2$

4) $y = \sqrt{x+1}$

5) $y = 3x^3$

6) $y = \sqrt{x}$

7) $y = x^2 + 5$

8) $y = \sqrt[3]{x}$

9) $y = x + 7$

10) $y = \sqrt{x^2 + 4}$

Q2: *Find the derivatives of the following function using the Rule derivatives*

1) $y = x^3$

2) $y = \frac{1}{x}$

3) $y = \sqrt{x}$

4) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2}}$

5) $y = \text{Sin}x$

7) $y = x^4 + 3x^2 - 6$

8) $y = 6x^3 - x^2$

9) $y = \frac{x^3}{a+b} + \frac{x^2}{a-b} - x$

10) $y = \frac{x^3 - x^2 + 1}{5}$

11) $y = 2ax^3 - \frac{x^2}{b_5} + c$

12) $y = x^7 + 3$

13) $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$

14) $y = \frac{(x+1)}{x^2}$

15) $y = \frac{x}{m} + \frac{n}{x} + \frac{x^2}{n^2}$

16) $y = 3\sqrt{x - x^2}$

17) $y = \frac{ax^2}{\sqrt[9]{x}}$

18) $y = \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{2} + x$

19) $y = x^2 + x + 1$

20) $y = x^2(x^3 - 1)$

21) $y = (x-2)^5(x+3)^{-4}$

22) $y = \frac{(x-2)(x+3)}{x^4}$

23) $y = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$

24) $y = (2x^3 - 3x^2 + 6x)^{-6}$

25) $y = \frac{\sqrt{x^2+3}}{x}$

26) $y = \frac{(x^2 - 1)}{x^2 + x - 2}$

✍تمارين خاصة حول حلول التفاضل

27) $y=(x+2)^2(x+2x)^{-5}$

28) $y=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4$

29) $y=x\sqrt{x^2+1}$

30) $y=\mathrm{Sec}^2 5x$

31) $y=\tan\sqrt{3x}$

32) $y=\mathrm{Sin}(x+1)$

33) $y=\mathrm{Cos}(3x+4)$

34) $y=x\,\mathrm{Sin}x$

35) $y=\tan(5x+1)$

36) $y=\mathrm{Cot}x-x^2\mathrm{Sec}x$

37) $y=\sqrt{2+\mathrm{Cot}x}$

38) $y=\sqrt{\frac{1+\mathrm{Csc}x}{2}}$

39) $y=\frac{\tan^3 x}{2}$

40) $y=\mathrm{Cec}^2x-\tan^2x$

41) $y^3=\mathrm{Sin}^2x.y-2\mathrm{Sin}x$

42) $y=\mathrm{Sec}^4x.\tan^4x$

43) $y=\frac{2x^4}{b^2-x^2}$

44) $y=\frac{a-x}{a+x}$

45) $y=\frac{t^3}{1+t^2}$

46) $y=2\mathrm{Sin}x+\mathrm{Cos}3x$

47) $y=\tan(ax+b)$

48) $y=\mathrm{Sin}^3t.\mathrm{Cos}t$

49) $y=a\mathrm{Sin}^3\left(\frac{x}{3}\right)$

50) $y=\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+\mathrm{Cot}\left(\frac{x}{2}\right)}{x}$

51) $y=\frac{\tan x-1}{\mathrm{Sec}x}$

52) $y=\mathrm{Ln}\sqrt{\frac{1+\mathrm{Sin}x}{1-\mathrm{Sin}x}}$

53) $y=\mathrm{Ln}\tan\left(45+\frac{x}{2}\right)$

54) $y=\mathrm{Ln}(ax+b)$

55) $y=\mathrm{Ln}(x^3-2x+5)$

56) $y=x\mathrm{Ln}x$

57) $y=\mathrm{Ln}^3x$

58) $y=\mathrm{Ln}(x+\sqrt{1+x^2})$

59) $y=\mathrm{Ln}(\mathrm{Ln}x)$

60) $y=e^{\mathrm{Cot}x}$

61) $y=x^4.e^{\mathrm{Csc}x}$

62) $y=\frac{1+e^x}{e^{2x}-1}$

❀تطبيقات حول المشتقة❀ :

S= المسافة التي يقطعها جسم معين في زمن معين t .
V= السرعة (S')
a = التعجيل (S'')

Example(1) :

جسم يسير وفق المعادلة التالية جد السرعة والتعجيل بعد مرور ثانيتين $S=\frac{1}{3}t^3-2t$

Sol. $S'=\frac{1}{3}.3t^2-2$

$S'=t^2-2$

$V(t)=t^2-2$

السرعة $V(2)=(2)^2-2=2\ m/sec$

$S''=2t$

التعجيل $a(t)=2t$

$a(2)=2(2)=4\ m/sec^2$

Example(2) :

جسم يسير بخط مستقيم وفق المعادلة التالية $S=t^3-6t^2+9t+4$
جد السرعة والتعجيل عندما t=0

Sol. $S'=3t^2-12t+9$

السرعة $V(t)=3t^3-12t+9$

$V(0)=9$

$S''=6t-12$

التعجيل $a(t)=6t-12$

$a(0)=-12$

Example(3) :

جد السرعة والتعجيل لجسم يتحرك وفق المعادلة التالية : $S=t^5+1$
عندما t=2 و t=5

Sol. $S'=5t^4$

$V(t)=5t^5$

$V(2)=5(2)^4=5(16)$

$V(5)=5(5)^4=5(625)m/sec$

$S''=20t^3$

$a(t)=20t^3$

$a(2)=20(2)^3=20(8)$

$a(5)=20(5)^4=20(125)m/sec^2$

Example(4) :

جد السرعة والتعجيل لجسم يتحرك وفق المعادلة التالية $S = t^3 - 4t + 6$
عندما t=0 ، ومتى يمكن ان تكون السرعة متزايدة

Sol. $S' = 3t^2 - 4$

$V(t) = 3t^2 - 4$

$V(0) = -4$

$S'' = 3x2t$

$a(t) = 6t$

$a(0) = 0$

تكون السرعة متزايدة اجعل V=0

$3t^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow t = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} \quad \Rightarrow let\, t_2 = +\sqrt{\frac{4}{3}}$

$v(t) = 3t^2 - 4$

$v(\sqrt{\frac{4}{3}}) = 3(\sqrt{\frac{4}{3}})^2 - 4$

$= 3\frac{4}{3} - 4$

$= 0$

الجسم مستقر السرعة = صفر ∴ لا تكون السرعة متناقصة وليست متزايدة .

❦❦التكامل Integration❦❦:

1) التكامل غير المحدد .
2) التكامل المحدد .

أذا كانت f(x) دالة قابلة للاشتقاق ضمن الفترة (a,b) بحيث إن f '(x) هي مشتقتها فأن المضاد لها يسمى التكامل ويرمز له $\int$. $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ ، C يسمى ثابت التكامل

$1) \int dx = x + c$

$2) \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c$

$3) \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

$4) \int (u + v)dx = \int u\,dx + \int v\,dx$

التكامل توزيعي على الجمع والطرح

$5) \int \frac{1}{u}du = Lnu + c$

$6) \int e^u\,du = e^u + c$

$7) \int a^u du = \frac{a^u}{Lna} + c$

$* \frac{d}{dx}(a^u) = a^u.Lna.\frac{du}{dx}$

✎ **Example :** **Find Integration :-**

$$1)\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+c$$

$$2)\int 3x^5dx=3.\frac{x^6}{6}+c$$

$$3)\int \frac{1}{x^2}dx=\int x^{-2}dx=\frac{x^{-1}}{-1}+c$$

$$4)\int \sqrt[3]{x}\,dx=\int x^{1/3}dx=\frac{x^{4/3}}{4/3}+c \qquad \frac{1}{3}+1=\frac{1}{3}+\frac{3}{3}=\frac{4}{3}***$$

$$=3/4\ x^{4/3}+c$$

$$5)\int(2x^2+5x+3)dx$$

$$=\int 2x^2dx+\int 5xdx+\int 3\,dx$$

$$=2\int x^2dx+5\int x\,dx+3\int dx$$

$$=2\frac{x^3}{3}+5\frac{x^2}{2}+3x+c$$

$$6)\int(2\sqrt{x}-3x\sqrt{x})dx$$

$$=2\int x^{1/2}\,dx-3\int x^{3/2}dx$$

$$=2\frac{x^{3/2}}{3/2}-3\frac{x^{5/2}}{5/2}+C$$

تكامل دالة داخل القوس (يجب إن تتوفر مشتقة داخل القوس)

$$7)\int(3x+2)^5dx$$

$$=\frac{3}{3}\int(3x+2)^5dx$$

$$=\frac{1}{3}\int(3x+2)^5.3dx$$

$$=\frac{1}{3}.\frac{(3x+2)^6}{6}+c$$

$$8)\int\frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}dx$$

$$=\frac{3}{3}\int(x^3+1)^{-1/2}.x^2dx$$

(مشتقة داخل القوس $3x^2$**)**

$$=\frac{1}{3}\int(x^3+1)^{-1/2}.3x^2\,dx$$

$$=\frac{1}{3}.\frac{(x^3+1)^{1/2}}{1/2}+c$$

$$9)\int\frac{8x^2dx}{(x^3+2)^3.}=8\int\frac{1}{(x^3+2)^3}.x^2\,dx$$

مشتقة داخل القوس=$(3x^2)$

$$=\frac{8}{3}\int(x^3+2)^{-3}.3x^2dx$$

$$=\frac{8}{3}\left(\frac{(x^3+2)^{-2}}{-2}+C\right.$$

$$10)\int\frac{(x^3+5x^2-4)}{x^2.}.dx$$

$$=\int\left(\frac{x^3}{x^2}+\frac{5x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}\right)\,dx$$

$$=\int xdx+\int 5.dx-\int 4x^{-2}dx$$

$$=\frac{x^2}{2}+5x-\frac{4x^{-1}}{-1}+C$$

$$11)\int(3S+4)^2dS$$

$$=\frac{3}{3}\int(3S+4)^2dS=\frac{1}{3}\int(3S+4)^2.3dS$$

$$=\frac{1}{3}*\frac{(3S+4)^3}{3}\qquad or(3S+4)^2=9S^2+24S+16$$

ثم توزيع التكامل

$$12)\int(x^2+1)^4\,dx$$

مشتقة داخل القوس =2x وهي غير متوفرة لذلك يجب ان يحلل القوس

$$(x^2+1)(x^2+1)^2$$

$$=(x^4+2x^2+1)\ (x^4+2x^2+1)$$

$$=x^8+2x^6+x^4+2x^6+4x^4+2x^2+x^4+2x^2+1$$

$$=x^8+4x^6+6x^4+4x^2+1$$

$$\Rightarrow\int(x^8+4x^6+6x^4+4x^2+1)dx$$

$$=\frac{x^9}{9}+\frac{4x^7}{7}+\frac{6x^5}{5}+\frac{4x^3}{3}+x+c$$

$$13)\int \frac{1}{x}dx = Ln|x| + c$$

$$14)\int \frac{1}{(2x+1)}dx = \frac{2}{2}\int \frac{1}{(2x+1)}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{(2x+1)}.2dx = \frac{1}{2}Ln|2x+1| + C$$

$$15)\int \frac{x^2}{(1-2x^3)}dx$$

$$= \frac{-6}{-6}\int \frac{x^2}{(1-2x^3)}dx = \frac{1}{-6}\int \frac{1}{(1-2x^3)}.-6x^2dx$$

$$= \frac{1}{-6}Ln|1-2x^3| + C$$

$$16)\int \frac{Cosx}{Sinx}dx = \int \frac{1}{Sinx}.Cosx\,dx$$

$$= Ln|Sin(x)| + C$$

$$17)\int tanxdx = \int \frac{Sinx}{Cosx}.dx$$

$$= -1\int \frac{1}{Cosx}.-Sinxdx = -Ln|Cosx| + C$$

$$18)\int e^x dx = e^x + C$$

$$19)\int e^{3x^2}.xdx = \frac{6}{6}\int e^{3x^2}xdx$$

$$= \frac{1}{6}\int e^{3x^2}.6x\,dx = \frac{1}{6}e^{3x^2} + C$$

$$20)\int \frac{e^{1/x}}{x^2}.dx = \int e^{x^{-1}}.x^{-2}dx$$

$$= -1\int e^{x^{-1}}.x^{-2}dx = -e^{-x} + C$$

$$21)\int a^{2x}dx = \frac{2}{2}\int a^{2x}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int a^{2x}.2dx = \frac{1}{2}a^{2x}/Lna + C$$

$$22)\int 8^{3x^2}.xdx = \frac{6}{6}\int 8^{3x^2}.xdx$$

$$= \frac{1}{6}\int 8^{3x^2}.6xdx = \frac{1}{6}\frac{8^{3x^2}.}{Ln8} + C$$

$$23)\int 7^{x^5}.x^4\,dx=\frac{5}{5}\int 7^{x^5}.x^4\,dx$$

$$=\frac{1}{5}\int 7^{x^5}.5x^4\,dx=\frac{1}{5}\frac{7^{x^5}.}{Ln7}+C$$

$$24)\int 8^{2x^{1/2}}.x^{-1/2}\,dx$$

$$=\frac{8^{2x^{1/2}}}{Ln8}+C$$

$$25)\int 10^{tanx}.Sec^2x\,dx=\frac{10^{tanx}}{Ln10}+C$$

$$=10^{tanx}+C$$

❤❤تكامل الدوال المثلثية ❤❤

$$1)\int Sinx.dx=-Cosx+c$$

$$2)\int Cosx.dx=Sinx+c$$

$$3)\int Sec^2x.dx=tanx+c$$

$$4)\int Csc^2x.dx=-Cotx+c$$

$$5)\int Secx.tanx.dx=Secx+c$$

$$6)\int Cscx.Cotx.dx=-Cscx+c$$

***ويجب إن تتوفر مشتقة داخل الزاوية دائماً.**

✎ **Example :Find Integration :-**

$1)\int \sin(5x)\ .dx = \frac{5}{5}\int \sin 5x.dx$

$= \frac{1}{5}\int \sin 5x.5dx = \frac{-1}{5}\cos 5x + c$

$2)\int x^2.\cos x^3.dx = \frac{3}{3}\int \cos x^3.x^2 dx$

$= \frac{1}{3}\int \cos x^3.3x^2 dx = \frac{1}{3}\sin x^3 + c$

$3)\int \sin^2 x.\cos x\, dx$

$= \int (\sin x)^2.\cos x.dx$

$= \frac{(\sin x)^3}{3} + c$

$4)\int \tan 5x.\sec 5x dx = \frac{5}{5}\int \sec 5x.\tan 5x$

$= \frac{1}{5}\int \sec 5x.\tan 5x.5dx = \frac{1}{5}.\sec 5x + c$

$5)\int x^2 \sec^2(3x^3)\ dx = \frac{9}{9}\int \sec^2(3x^3).x^2 dx$

$= \frac{1}{9}\int \sec^2(3x^3).9x^2 dx$

$= \frac{1}{9}\tan(3x^3) + c$

$6)\int x\csc^2 x^2.dx = \frac{2}{2}\int \csc^2 x^2.xdx$

$= \frac{1}{2}\int \csc^2 x^2.2xdx$

$= \frac{1}{2}.-\cot x^2 + c = \frac{-1}{2}\cot x^2 + c$

$7)\int x^2 \csc(x^3)\ .\cot(x^3)dx$

$= \frac{3}{3}\int x^2 \csc x^3.\cot x^3\, dx$

$= \frac{1}{3}\int \csc x^3.\cot x^3\, 3x^2\, dx$

$= \frac{1}{3}.-\csc x^3 + c$

$$8)\int x(\ \cos 5x^2+\sin 4x^2)\ .dx$$

$$\int(\ \cos 5x^2.x+\sin 4x^2.x)\ .dx$$

$$=\frac{1}{10}\cos 5x^2 10x.dx+\frac{1}{8}\int \sin 4x^2.8x\,dx$$

$$=\frac{1}{10}\sin 5x^2-\frac{1}{8}.\cos 4x^2+c$$

♣♣التكامل المحدد ♣♣:

$$\int_a^b f(\ x)\ dx=F(\ x)\Big|_a^b=F(\ b)-F(\ a)$$

يفيد هذا التكامل في حساب المساحات والحجوم

$$1)\int_0^5 x.dx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^5=\frac{5^2}{2}-\frac{0^2}{2}=\frac{25}{2}$$

$$2)\int_1^3 x^3.dx=\frac{x^4}{4}\Big|_1^3=\frac{(\ 3)^4}{4}-\frac{(\ 1)^4}{4}=\frac{81}{4}-\frac{1}{4}=\frac{80}{4}=20$$

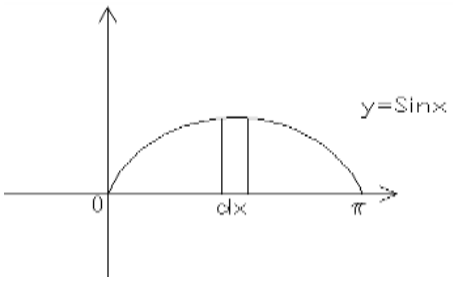
جد المساحة تحت المنحني $y=x^2$ **من** $x=1$ **الى** $x=4$

$$A=\int_1^4 x^2.dx=\frac{x^3}{3}\Big|_1^4=\frac{(\ 4)^3}{3}-\frac{1}{3}=\frac{63}{3}$$

جد المساحة تحت المنحني $y=Sinx$ **من** $x=0$ **الى** $x=\pi$

$$A=\int_0^\pi \sin x.dx=-\cos x\Big|_0^\pi=-[\cos\pi-\cos 0]$$

$$=-[-1-1]=2$$



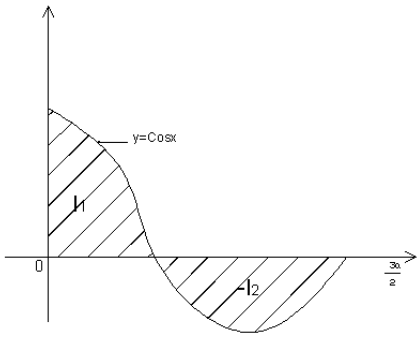
أوجد المساحة تحت المنحني $y=x^3-6x^2+8x$ **من** $x=0$ **الى** $x=2$

$$A=\int_0^2(\ x^3-6x^2+8x)\ .dx$$

$$=\frac{x^4}{4}-\frac{6x^2}{3}+\frac{8x^2}{2}\Big|_0^2=\frac{2^4}{4}-2(\ 2)^3+4(\ 2)^2$$

$$=4\,Sq.Unit$$

4- أحسب التكامل من الشكل التالي :



$$I = I_1 - I_2$$

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \text{Cosx}\, dx$$

$$= \text{Sinx}\ {}_0/^{\pi/2}$$

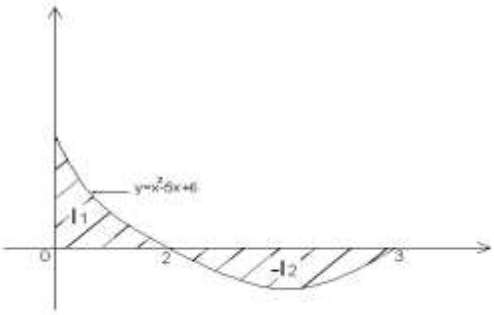
$$= \text{Sin}\ \frac{\pi}{2} - \text{Sin}\ 0 = +1 - 0 = 1$$

$$I_2 = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \text{Cosx}\, dx = \text{Sinx}\ {}_{\pi/2}/^{3\pi/2} = \text{Sin}\frac{3\pi}{2} - \text{Sin}\frac{\pi}{2} = 1 - (+1) = |-2|$$

$$I_2 = 2$$

$$\therefore I = |1 + 2| = |3| = 3\ \text{unit}^2$$

5- أحسب التكامل من الشكل التالي :



$$I = I_1 - I_2$$

$$I_1 = \int_0^2 (x^2 - 5x + 6)dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x\ {}_0/^2$$

$$= \frac{2^3}{3} - \frac{5*2^2}{2} + 6*2$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{20}{2} + \frac{12}{1} = \frac{16 - 60 + 72}{6} = \frac{88 - 60}{6} = \frac{28}{6} = \frac{14}{3}$$

$$I_2 = \int_2^3 (x^2 - 5x + 6)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x\ {}_2/^3$$

$$= \left(\frac{3^3}{3} - \frac{5*3^2}{2} + 6*3\right) - \frac{28}{6}$$

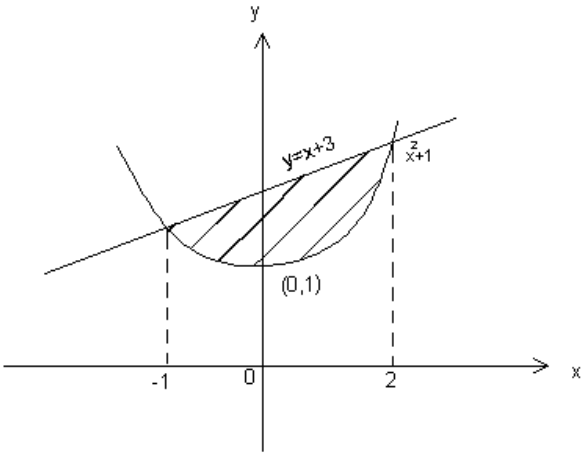
$$= \left(9 - \frac{45}{2} + 18\right) - \frac{28}{6} = \frac{-1}{6}$$

$$I_2 = \frac{28}{6} - \left(27 - \frac{45}{2} - \frac{28}{6}\right)$$

$$I_2 = \frac{28}{6} - 27 + \frac{45}{2} + \frac{28}{6} = \frac{29}{6}$$

$$\therefore I = \frac{14}{3} - \left(\frac{-1}{6}\right) = 9\ \text{Unit}^2$$

6- أحسب التكامل من الشكل التالي :



$$y = x + 3$$
$$y = x^2 + 1$$
$$x^2 + 1 = x + 3$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$(x-2)\ (x+1)$$
$$x = 2 \quad \text{or} \quad x = -1$$

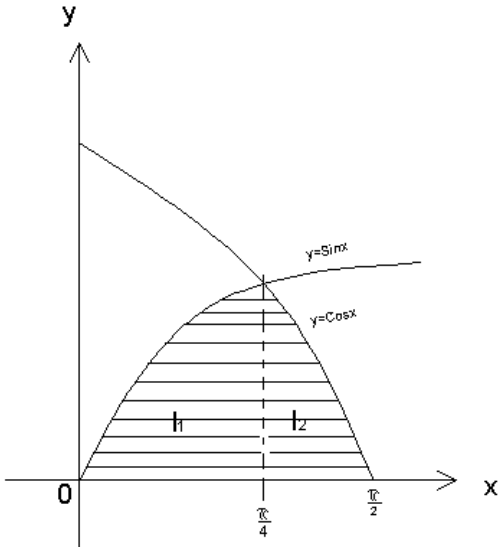
$$I = \int_{-1}^{2} \left((x+3) - (x^2+1) \right) dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + 3x - \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_{-1}^{2}$$

$$= (2+6) - \left(\frac{8}{3} + 2\right) - \left(\frac{1}{2} - 3\right) - \left(\frac{-1}{3} - 1\right)$$

$$= 4\frac{1}{2} \ \text{unit}^2$$

7- أحسب التكامل من الشكل التالي :



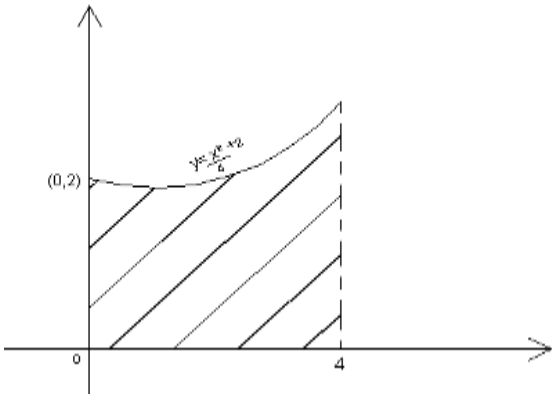
$$I = I_1 + I_2$$

$$I = \int_0^{\pi/4} \text{Sin}x\,dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \text{Cos}x\,dx$$

$$= -\text{Cos}x \Big|_0^{\pi/4} + \text{Sin}x \Big|_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$= -0.7071 + 1 + 1 - 0.7071$$
$$= 2 - 1.4142 = 0.5858 \ \text{Unit}^2$$

8- أحسب التكامل من الشكل التالي :

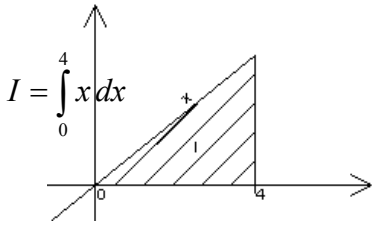


$$I = \int_0^4 (\frac{x^2}{4} + 2)\, dx$$

$$= \frac{x^3}{12} + 2x \;\; {}_0/^4 = 13\frac{1}{3} \;\; Unit$$

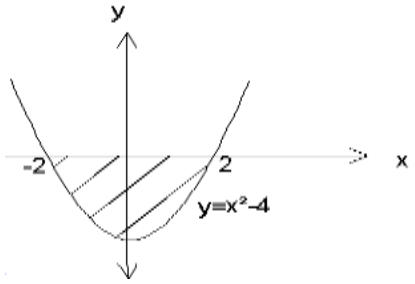
تمارين تطبيقية :

$I = 8$

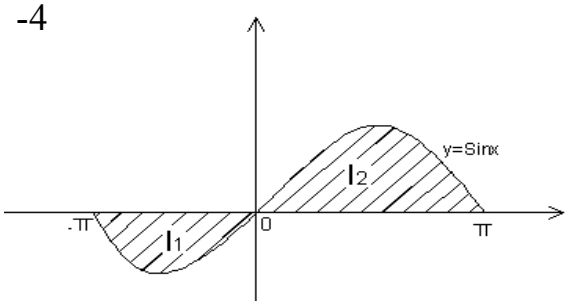


$$I = \int_0^4 x\, dx$$

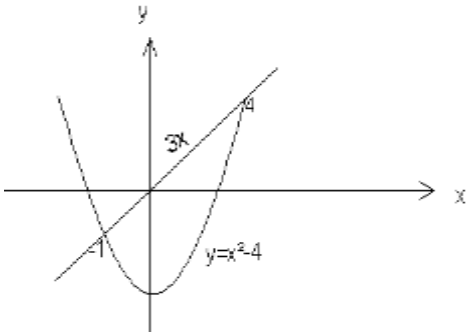
$I = \frac{32}{3} - 2$



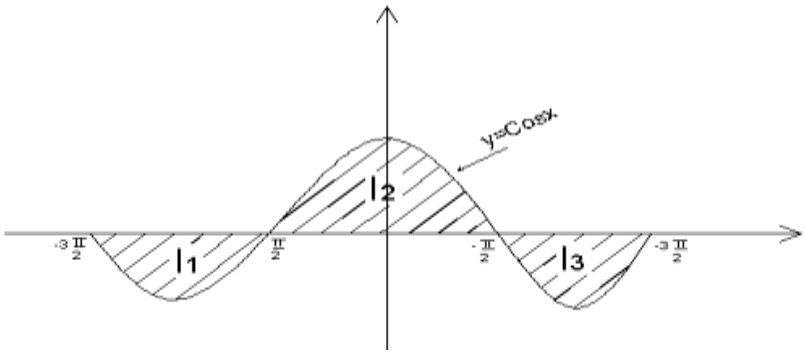
-3



-4



-5



تمارين تطبيقية على التكامل :-

1) $\int_{0}^{\pi/2} (\sin x - \cos x)\,dx$

2) $\int_{-3}^{2} (x - 6x^2)\,dx$

3) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}$

4) $\int (1+x^2)^2 . x^2\,dx$

5) $\int (1+x^2)^2 . dx$

6) $= \int \frac{dx}{x(2+3\ln x)^2}$

7) $\int e^{2x}\sqrt{3+e^{2x}}\,dx$

8) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$

9) $\int \tan 5x . \sec^4 5x\,dx$

10) $\int \frac{2x}{x^2-3}\,dx$

11) $\int (2+\frac{1}{x})^2\,dx$

12) $\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}\,dx$

13) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$

14) $\int \sec^2 x . e^{\tan x}\,dx$

15) $\int \frac{6}{x^7}\,dx$

16) $= \int_{1}^{2} (3x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}})\,dx$

17) $\int_{0}^{1} \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$

18) $\int_{1}^{5} (25-x^2)^{-1/2} x\,dx$

19) $\int_{0}^{\pi/2n} \cos nx\,dx$

20) $\int_{0}^{2\pi/w} \sin wt\,dt$

21) $\int_{2}^{-1} \frac{3x}{1+2x^2}\,dx$

22) $\int_{-1}^{2} \frac{x^2-5x+6}{x-2}\,dx$

23) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}\,dx}{\sqrt{x}}$

24) $\int \frac{(x-1)}{x^2-2x+3}\,dx$

25) $\int \tan 5x . \sec^2 5x\,dx$

26) $= \int \sin^3 x\,dx$

Note: $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

27) $\int \sec^2 x . e^{\tan x}\,dx$

28) $\int \frac{2x+1}{x^2+x}\,dx$

29) $\int_1^{10} \left(3x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$

30) $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}$

31) $\int \left(x^2 - 2x - 1 + \frac{3}{x+2} \right) dx$

32) $\int \sin^{2/5} x \left(1 - \sin^2 x \right) . \cos x\,dx$

33) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx$

34) $\int \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{3}\,dx$

35) $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx$

36) $\int \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{3}}\,dx$

37) $\int 100^{x^{100}} . x^{99}\,dx$

38) $\int \frac{x}{9 - x^2}\,dx$

39) $\int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\,dx = \sqrt{2} - 1 = 0.4$

40) $\int_0^1 (1 - x)\,dx = \frac{1}{2}$

41) $\int \csc x . \cos x\,dx$

42) $\int \sec x . \sin x\,dx$

43) $\int \frac{dx}{e^{x+1}} = \ln \left| 1 + e^{-x} \right| + c$

44) $\int_0^{10} \frac{dx}{(9 - x)}$

45) $\int 8^{3x^2} . 6x\,dx$

46) $\int \frac{8x^2}{(x^3 + 2)^3}\,dx$

47) $\int (x^3 + 3)^4\,dx$

48) $\int \frac{x^2}{(1 - 2x^3)}\,dx$

49) $\int \sin^{10} 2x^2 . x \cos 2x^2\,dx$

50) $\int_0^1 8^{2\sqrt{x}} / \sqrt{x}\,dx$

❄❄طرق التكامل❄❄ :

التكامل بطريقة التجزئة

أذا كانت v,u دالتين قابلتين للاشتقاق فأن :

$$d(uv)=u.dv+v.du$$

$$\int d(uv)=\int u.dv+\int v.du$$

$$uv=\int u.dv+\int v.du$$

$$\boxed{\int u.dv=uv-\int v.du}$$ Py - Bart

$$1)\int \underset{u}{x}\,\underset{dv}{Sinx}\,dx$$

$$\text{let } u=x \Rightarrow du=dx$$

$$dv=Sinxdx \Rightarrow \int dv=\int Sinxdx$$

$$v=-Cosx \qquad \boxed{\int u.dv=uv-\int v.du}$$

$$\therefore \int x.Sinxdx=x.-Cosx-\int -Cosxdx$$

$$=Cosx+\int Cosxdx$$

$$=-x.Cosx+Sinx+c$$

$$2)\int \underset{u}{x}\,\underset{dv}{e^x}\,dx \quad ,3)\int x^2.e^x dx$$ 3) H.W

$$x=u \Rightarrow dx=du \qquad .....(1)$$

$$e^x dx=dv \Rightarrow v=e^x \qquad .....(2)$$

$$\int u.dv=uv-\int v.du$$

$$\int xe^x dx=x.e^x-\int e^x.dx$$

$$=xe^x-e^x+c$$

$$4)\int x.Lnxdx=\int \underset{u}{Lnx}.\underset{dv}{xdx}$$

$$u=Lnx \Rightarrow du=\frac{1}{x}.dx$$

$$dv=xdx \Rightarrow v=\frac{x^2}{2}$$

$$\int xLnxdx=Lnx.\frac{x^2}{2}-\int \frac{x^2}{2}.\frac{1}{x}$$

$$=Lnx.\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}.\frac{x^2}{2}+c$$

$$=Lnx\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{4}+c$$

✳✳تجزئة الكسور✳✳:

عندما تكون مشتقة المقام غير متوفرة

يحلل المقام إلى أقواس

نجزء الكسر ثم نحدد المجاهيل

$$1)\int \frac{dx}{(x^2-9)} = \int \frac{dx}{(x-3)(x+3)}$$

$$\frac{1}{(x-3)(x+3)} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x+3)}$$

$$\frac{1}{(x-3)(x+3)} = \frac{A(x+3)+B(x-3)}{(x-3)(x+3)}$$

$$1 = Ax + 3A + Bx - 3B$$

$$A + B = 0 \quad \Rightarrow A = -B$$

$$3A - 3B = 1$$

$$-3B - 3B = 1 \Rightarrow -6B = 1 \quad \Rightarrow B = -\frac{1}{6} \quad \therefore A = \frac{1}{6}$$

$$\therefore \int \frac{dx}{(x^2-9)} = \frac{1}{6}\int \frac{1}{(x-3)} - \frac{1}{6}\int \frac{1}{(x+3)}$$

$$= \frac{1}{6}Ln|x-3| - \frac{1}{6}Ln|x+3| + c$$

$$2)\int \frac{1}{(x^2-4)}.dx = \int \frac{1}{(x-2)\ (x+2)}.dx$$

$$\frac{1}{(x-2)\ (x+2)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+2)}$$

$$= \frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)\ (x+2)}$$

$$Ax + 2A + Bx - 2B = 1$$

$$A + B = 0 \quad .....(1) \ *-2$$

$$3A - 2B = 1 \quad .....(2)$$

$$-2A - 2B = 0$$

$$2A - 2B = 1$$

$$-4B = 1$$

$$\therefore B = -\frac{1}{4} \qquad \Rightarrow A = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \int \frac{dx}{(x^2-4)} = \frac{1}{4}\int \frac{1}{(x-2)} - \frac{1}{4}\int \frac{1}{(x+2)}$$

$$= \frac{1}{4}Ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$$

صيغة الكسر $\frac{f(x)}{g(x)}$

1- اذا كانت g(x) دالة خطية (من الدرجة الاولى غير مكررة x+b

$$1)\ \frac{1}{(x+7)(x-2)}=\frac{A}{(x+7)}+\frac{B}{(x-2)}$$

2- اذا كانت g(x) دالة خطية مكررة

$$2)\ \frac{1}{(x+1)^2(x-1)}=\frac{A}{(x+1)}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{c}{(x-1)}$$

3- اذا كانت g(x) دالة من الدرجة الثانية غير مكررة

$$3)\ \frac{1}{(x+1)(x^2+2)}=\frac{A}{(x+1)}+\frac{Bx+c}{(x^2+2)}$$

$$4)\ \frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+c}{(x^2+1)}$$

4- اذا كانت g(x) دالة من الدرجة الأولى وغير مكررة

$$5)\ \frac{x^3-5x+1}{(x+2)} \quad \Rightarrow \quad x^2-2x-1+\frac{3}{x+2}$$

$$\begin{array}{r|l} & x^2-2x-1 \\ \hline (x+2) & x^3-5x+1 \\ & x^3 \mp 2x^2 \\ \hline & -2x^2-5x+1 \\ & \pm 2x^2 \pm 4x \\ \hline & -x \quad + 1 \\ & \pm x \quad \pm 2 \\ \hline & \quad 3 \end{array}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^3-5x+1}{(x+2)}.dx=\int (x^2-2x-1)\ .dx+\int \frac{3}{x+2}dx$$

$$\frac{-x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}-x+3Ln|x+2|+c$$

$$\int \frac{2x+41}{x^2+5x-14}.dx$$

$$x^2+5x-14=(x+7)(x-2)$$

$$\frac{2x+41}{(x+7)(x-2)}=\frac{A}{(x+7)}+\frac{B}{(x-2)}$$

$$= \frac{A(x-2)+B(x+7)}{(x+7)(x-2)}$$

$$\Rightarrow Ax-2A+Bx+7x=2x+41$$

$$A+B=2 \quad \Rightarrow \quad A=2-B$$

$$-2A+7B=41$$

$$-2(2-B)+7B=41$$

$$\Rightarrow 9B=45$$

$$\therefore B=\frac{45}{9}=5 \quad \Rightarrow \quad A=2-3=-3$$

$$\int \frac{2x+41}{x^2+5x-14}.dx=\int \frac{-3}{(x+7)}.dx+\int \frac{5}{(x-2)}.dx$$

$$=-3Ln|x+7|+5Ln|x-2|+c$$

$$\int \frac{4x-3}{6x^2-x-12}.dx$$

$$\frac{4x-3}{(3x-4)(2x-3)}=\frac{A}{(3x-4)}+\frac{B}{(2x-3)}$$

$$\Rightarrow A=\frac{25}{17}, \quad B=\frac{6}{17}$$

$$\int \frac{4x-3}{6x^2-x-12}.dx=\int \frac{25/17}{(3x-4)}.dx+\int \frac{6/17}{(2x-3)}.dx$$

$$=25/17 * 3Ln|3x-4| + 6/17 * 2Ln|2x-3|$$

2- اذا كانت g(x) دالة خطية مكررة

$$c=5/4$$

$$B=-5/2$$

$$A=-5/4$$

$$\int \frac{5x\,dx}{(x+1)^2(x-1)}=\frac{A}{(x+1)}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{c}{(x-1)}$$

$$\int \frac{5\,dx}{(x+1)^2(x-1)}=\int \frac{-5/4}{(x+1)}.dx+\int \frac{-5/4}{(x+1)^2}.dx+\int \frac{5/4}{(x-1)}$$

$$=\frac{-5}{4}Ln|x+1|-\frac{5}{2}\frac{(x+1)^{-1}}{-1}+\frac{5}{4}Ln|x-1|+c$$

اذا كانت g(x) دالة خطية من الدرجة الثانية وغير مكررة

$$\int \frac{3x^3+1}{x(x^2+1)}dx = \frac{A}{x} + \frac{Bx+c}{(x^2+1)}$$

$$\Rightarrow A=1 \quad , \quad B=2 \quad , \quad c=0$$

$$= \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{2x}{(x^2+1)}dx$$

$$= Ln|x| + Ln|x^2+1| + c$$

$$\int \frac{4x^2+3}{(x+1)(x^2+2)}dx = \frac{A}{(x+1)} + \frac{Bx+c}{(x^2+2)}$$

$$\Rightarrow A = 4/3 \quad ,B = 7/3 \quad ,c = 1/3$$

$$\int \frac{4/3}{x+1}dx + \int \frac{7/3\,x + 1/3}{(x^2+2)}dx$$

$$= 4/3\, Ln|x+1| + \frac{1}{3}\int \frac{7x+1}{(x^2+2)}dx$$

$$= 4/3\, Ln|x+1| + \frac{1}{3}\int \left[\frac{7x}{(x^2+2)} + \frac{1}{(x^2+2)}\right]dx$$

$$\int \frac{7x}{(x^2+2)} = 7/2 \int \frac{2x}{x^2+2}dx + \int \frac{1}{x^2+2}dx$$

$$= \frac{7}{2}\ Ln|x^2+2| + c$$

☻☻حل المعادلات التفاضلية☻☻ :

* طريقة فصل المتغيرات

يمكن حل المعادلة التفاضلية في حالة امكانية جمع كل حدود y مع dy وكل حدود x مع dx أي انه اذا كتبت المعادلة:

$$f(y).dy+g(x).dx=0$$

فان الحل العام

$$\int f(y).dy+\int g(x).dx=c$$

✎ **Example (1):**

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x^2}+x$$

$$\int dy=\int(\frac{1}{x^2}+x)dx$$

$$y=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}x^2+c$$

✎ **Example (2):**

$$\frac{dy}{dx}=(xy)^{1/2} \qquad x>0\,,y>0$$

$$dy=(xy)^{1/2}\,dx$$

$$\int\frac{dy}{(y)^{1/2}}=\int(x)^{1/2}.dx$$

$$2\sqrt{y}=\frac{2}{3}x^{3/2}+c$$

$$\sqrt{y}=\frac{1}{3}x^{3/2}+2c$$

$$y=(\frac{1}{3}x^{3/2}+2c)^2$$

✎ **Example (3):**

$$\frac{dy}{dx}=20y^2(4x^2+4x^{-2}) \quad x>0\,,y>0$$

$$\int\frac{dy}{20y^2}=\int(4x^2+4x^{-2}).dx$$

$$\frac{-1}{20}y=\frac{4}{3}x^3-\frac{4}{x}+c$$

$$y=\frac{-80}{3}+\frac{80}{x}+c$$

Example: (4)

$$\frac{dy}{dx} = (2x+1)^3$$

$$\int dy = \int (2x+1)^3 \,.\, dx$$

$$\int dy = \frac{1}{2}\int (2x+1)^3 .2\, dx$$

$$y = \frac{1}{8}(2x+1)^4 + c$$

✎ **Example: (5)**

$$\frac{dy}{dx} = 2xy^2$$

$$\frac{dy}{y^2} = 2x.dx$$

$$\frac{-1}{y} = x^2 + c$$

$$y = \frac{-1}{x^2 + c}$$

حل المعادلات التفاضلية الخاضعة للشروط المنصوص عليها :

Example: (6)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{(1+y^2)^3}}{y} \qquad x \le 0 \;,\; y \le 1$$

$$\int \frac{y\, dy}{(1+y^2)^{3/2}} = \int dx$$

$$\int y(1+y^2)^{-3/2} dy = \int dx$$

$$\frac{1}{2}.\int 2y(1+y^2)^{-3/2} dx = \int dx$$

$$\frac{1}{2}.\frac{-1}{\frac{1}{2}\sqrt{1+y^2}} = x + c$$

$$\frac{-1}{\sqrt{1+1^2}} = 0 + c \qquad \Rightarrow c = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{-1}{\sqrt{1+y^2}} = x - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{1+y^2} = \frac{-1}{x - \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$1 + y^2 = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}x - 1}$$

$$y^2 = -1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}x - 1}$$

$$y = \pm\sqrt{-1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}x - 1}}$$

Example: (7)

$$\frac{dy}{dx} = x\sqrt{1+x^2} \qquad x=0, y=-3$$

$$\int dy = \int x\sqrt{1+x^2}.dx$$

$$\int dy = \frac{1}{2}\int (1+x^2)^{1/2}.2xdx$$

$$y = \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2} + c$$

$$-3 = \frac{1}{3}\sqrt{(1+0)^3} + c$$

$$c = \frac{-10}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3}\sqrt{(1+x^2)^3} - \frac{10}{3}$$

Example:(8)

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$(1,10)\ y \neq 0,\ x \neq 0$

$$y\,dx - x\,dy = 0$$

$$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0$$

$$\int \frac{dy}{y} - \int \frac{dx}{x} = 0$$

$$Lny - Lnx + c = 0$$

$$Ln\frac{y}{x} + c = 0$$

$$c = -Ln\frac{y}{x}$$

$$c = -Ln\frac{10}{1}$$

$$c = -Ln10$$

$$\therefore c = -1 \Rightarrow Ln\frac{y}{x} - 1 = 0$$

$$lny = lnx = lne^c$$

$$ln|y| = ln(|x|.e^c)$$

$$y = x.e^c$$

$$y = x.e^{-1}$$

الحل العام

Example:(9)

$$\frac{dy}{x}+\frac{dx}{y}=0 \qquad (1,1)$$

$$\frac{dy}{x}=-\frac{dx}{y}$$

$$\int y\,dy=-\int x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2}=-\frac{x^2}{2}+c$$

$$\frac{y^2}{2}+\frac{x^2}{2}+c=0$$

$$\frac{1^2}{2}+\frac{1^2}{2}+c=0$$

$$\Rightarrow c=-1 \Rightarrow \frac{y^2}{2}+\frac{x^2}{2}-1=0$$

$$\frac{y^2}{2}=1-\frac{x^2}{2}\Big|*2$$

$$y^2=2-x^2$$

$$y=\pm\sqrt{2-x^2}$$

Example(10) :

$$\frac{dy}{dx}=e^{5x-y} \qquad (0,0)$$

$$\frac{dy}{dx}=e^{5x}.e^{-y}$$

$$\frac{dy}{e^{-y}}=e^{5x}dx$$

$$\int e^{y}\,dy=\frac{1}{5}\int e^{5x}.5dx$$

$$e^{y}=\frac{1}{5}e^{5x}+c$$

$$e^{0}=\frac{1}{5}e^{0}+c \qquad \because e^{0}=1$$

$$\therefore\ c=-\frac{1}{5}$$

$$\therefore\ e^{y}=\frac{1}{5}e^{5x}-\frac{1}{5}$$

$$\ln e^{y}=\ln\left(\frac{1}{5}e^{5x}-\frac{1}{5}\right)$$

$$y\ln e=\ln\left(\frac{1}{5}e^{5x}-\frac{1}{5}\right)$$

$$y=\ln\left(\frac{1}{5}e^{5x}-\frac{1}{5}\right)$$

تمارين تطبيقية :

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية عند النقطة المعينة:

1) $\frac{dy}{dx}+y=1 \qquad (1,1)$

2) $xy^3dx+e^{x^2}dy=0 \qquad (0,1)$

3) $x^2dx+y(x-1)\,dy=0 \qquad (1,2)$

4) $xy^3dx+(y+1)\,e^{-x}dy \qquad (0,3)$

5) $\frac{dy}{dx}+x+2y=0 \qquad (0,5)$

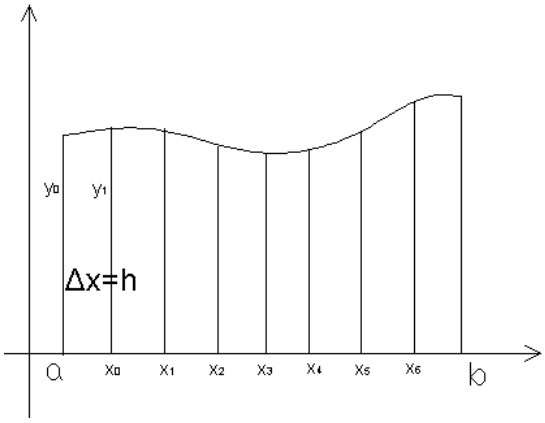
6) $y.\frac{\ln x}{x}=\frac{dy}{dx}$

7) $\frac{dy}{dx}=xy \qquad (0,10)$

الطرق العددية في التكامل Numerical Methods in integration

1- قاعدة شبه المنحرف Rule of trapezoidal :

لتكن f(x) دالة غير سالبة وقابلة للتكامل ضمن الفترة [a,b] تجزئ الفترة الى n من الفترات بتجزئة منتظمة ونحدد الإحداثيات الصادية وبذلك تقسم الى n من الشرائح .



$$h = \Delta X = \frac{b-a}{n}$$

$$X_i = a + i\Delta x$$

$$X_0 = a$$

$$X_1 = a + 1\Delta x$$

$$X_2 = a + 2\Delta x$$

$$X_3 = a + 3\Delta x$$

$$X_4 = a + 4\Delta x$$

$$X_5 = a + 5\Delta x = b$$

i = عداد

$$A_1 = \left(\frac{y_0 + y_1}{2}\right) . h$$

المساحة = العرض x الارتفاع

= المعدل بين الطولين x العرض

$$\therefore A = h\left[\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{y_n}{2}\right]$$

n يمكن ان يكون عدد فردي

مثال (1) إحسب القيمة التقريبية للتكامل المحصور بين x=1 , x=0 بطريقة شبه المنحرف على اعتبار n=5 .

X	Y	F(x)
0	Y_0	1
0.2	Y_1	0.96
0.4	Y_2	0.86
0.6	Y_3	0.73
0.8	Y_4	0.61
1	Y_5	0.5

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)} dx$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{5} = 0.2$$

$$A = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)} dx = h\left[\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \frac{y_5}{2}\right]$$

$$= 0.2\left[\frac{1}{2} + 0.96 + 0.86 + 0.73 + 0.61 + \frac{0.5}{2}\right]$$

$$= 0.2\left[\frac{1.5}{2} + 3.16\right]$$

$$= 0.2[0.75 + 3.16] = 0.2[3.91] = 0.782$$

☜ مثال (2)إحسب قيمة التكامل بطريقة شبه المنحرف ثم احسب قيمة التكامل بالطريقة الحقيقية على اعتبار n=5 .

X	Y	F(x)
0	Y_0	1
0.2	Y_1	0.04
0.4	Y_2	0.16
0.6	Y_3	0.36
0.8	Y_4	0.64
1	Y_5	1

$$\int_0^1 x^2\,dx$$

$$A=\int_0^1 x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}=0.333334$$

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{1-0}{5}=0.2$$

$$A=\int_0^1 x^2\,dx=0.2\left[0+0.04+0.16+0.36+0.64+\frac{1}{2}\right]$$

$$=0.34$$

☜ مثال (3) إحسب قيمة التكامل بالطريقة الحقيقية ثم بطريقة شبه المنحرف وافرض ان n=5 .

X	Y	F(x)
1	Y_0	1
1.2	Y_1	0.83
1.4	Y_2	0.71
1.6	Y_3	0.62
1.8	Y_4	0.56
2	Y_5	0.5

$$\int_1^2 \frac{dx}{x}$$

$$A=\int_1^2 \frac{dx}{x}=Ln|x|\Big|_1^2=Ln2-Ln1=0.693$$

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{2-1}{5}=0.2$$

$$A=0.2\left[\frac{1}{2}+0.83+0.71+0.62+0.56+\frac{0.5}{2}\right]$$

$$A=0.694$$

☜ مثال (4)إحسب قيمة التكامل بطريقة شبه المنحرف بأخذ n=4 .

X	Y	F(x)
0	Y_0	1
0.25	Y_1	0.9399
0.50	Y_2	0.7788
0.75	Y_3	0.5701
1	Y_4	0.3679

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx$$

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{1-0}{4}=0.25$$

$$A=0.25\left[\frac{1}{2}+0.9399+0.7788+0.5701+\frac{0.3679}{2}\right]$$

$$A=0.25[0.5+0.9399+0.18395]=2.97275$$

مثال(5) إحسب التكامل بطريقة شبه المنحرف افرض **n=5** .

$$\int_{-3}^{2}\sqrt{9-x^2}dx$$

X	Y	F(x)
-3	Y_0	0
-2	Y_1	$\sqrt{5}$
-1	Y_2	$\sqrt{8}$
0	Y_3	3
1	Y_4	$\sqrt{8}$
2	Y_5	$\sqrt{5}$

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{2+3}{5}=\frac{5}{5}=1$$

$$A=1\left[0+\sqrt{5}+\sqrt{8}+3+\sqrt{8}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$$

$$=\left[\sqrt{5}+2\sqrt{8}+3+\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$$

$$=[2.236+5.6569+1.118]=12.0109$$

مثال(6) $\int_0^{1/2}\frac{dx}{1+x^2}$ افرض n=5

X	Y	F(x)
0	Y_0	1
0.1	Y_1	$\frac{1}{1.01}$
0.2	Y_2	$\frac{1}{1.04}$
0.3	Y_3	$\frac{1}{1.09}$
0.4	Y_4	$\frac{1}{1.16}$
0.5	Y_5	$\frac{1}{1.25}$

$$h=\frac{1/2-0}{5}=0.1$$

$$A=0.1\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{1.01}+\frac{1}{1.04}+\frac{1}{1.09}+\frac{1}{1.16}+\frac{1}{2(1.25)}\right]$$

$$=0.463(1\ Uint^2)$$

♥♥طريقة سمسون ♥♥♥ Simpson's Rule ♥♥

في هذه الطريقة يجب ان تكون التقسيمات بعدد زوجي{4,6,8,10.....}

$$n = 2m$$

$$h = \frac{a-b}{n}$$

$$\int_a^b f(x)\ dx = \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots\ldots + y_n]$$

☜ مثال (1) باستخدام طريقة سمسون أحسب قيمة التكامل وافرض n=4

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$h = \frac{1/2 - 0}{4} = \frac{1}{8}$$

$$A = \frac{1}{8*3}\left[1 + 4*\frac{1}{1+(\frac{1}{8})^2} + 2*\frac{1}{1+(\frac{1}{4})^2} + 4*\frac{1}{1+(\frac{3}{8})^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{2})^2}\right]$$

$$= \frac{1}{24}\left[1 + \frac{256}{65} + \frac{32}{17} + \frac{256}{73} + \frac{4}{3}\right] = 0.4637$$

X	Y	F(x)
0	Y_0	1
$\frac{1}{8}$	Y_1	$\frac{1}{1+(\frac{1}{8})^2}$
$\frac{1}{4}$	Y_2	$\frac{1}{1+(\frac{1}{4})^2}$
$\frac{3}{8}$	Y_3	$\frac{1}{1+(\frac{3}{8})^2}$
$\frac{1}{2}$	Y_4	$\frac{1}{1+(\frac{1}{2})^2}$

☜ مثال (2) استخدام طريقة سمسون n=4 .

$$\int_0^1 x^2 dx$$

$$h = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$$

$$A = \frac{1}{4*3}\left[0 + 4*\frac{1}{16} + 2*\frac{1}{4} + 4*\frac{9}{16} + 1\right]$$

$$= \frac{1}{12}[4] = \frac{1}{3} \text{ Sq.Unit.}$$

X	Y	F(x)
0		1
$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{16}$
$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$
$\frac{3}{4}$		$\frac{9}{16}$
1		1

☜ مثال (3) استخدام طريقة سمسون n=4 .

$$\int_0^1 \frac{1}{x}dx$$

$$h = \frac{2-1}{4} = 0.25$$

$$A = \frac{0.25}{3}[1 + 4*0.8 + 2*0.066 + 4*0.57 + 0.5]$$

$$= 0.693 \text{ Sq.uint}$$

X	Y	F(x)
1	Y_0	1
1.25	Y_1	0.8
1.5	Y_2	0.66
1.75	Y_3	0.57
2	Y_4	0.5

☜ مثال (4) استخدام طريقة سمسون (n=6).

$$\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}dx$$

$$h = \frac{3+3}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

$$A = \frac{1}{3}\left[0 + 4*\sqrt{13} + 2*\sqrt{8} + 4*3 + 2*\sqrt{8} + 4*\sqrt{13} + 0\right]$$

$$A = \frac{1}{3}[14.4222 + 5.6568 + 12 + 5.6568 + 14.4222]$$

$$A = [17.386]$$

X	Y	F(x)
-3	Y_0	0
-2	Y_1	$\sqrt{13}$
-1	Y_2	$\sqrt{8}$
0	Y_3	3
1	Y_4	$\sqrt{8}$
2	Y_5	$\sqrt{13}$
3	Y_6	0

✍ تمارين تطبيقية :-

1) $\int_1^4 \frac{2}{(1+x^2)}dx$ $\qquad n = 5$

2) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x}$ $\qquad n = 4$

3) $\int_1^2 \sqrt{x}\, dx$ $\qquad n = 5$

4) $\int_1^4 \frac{2}{\sqrt{1+x}}dx$ $\qquad n = 6$

5) $\int_0^{1/2} \sqrt{1-x^2}dx$ $\qquad n = 4$

المتسلسلات والمتواليات.(Sequences and Series)

المتواليات: هي دالة مجالها(Z^+) مجموعة الاعداد الصحيحة الموجبة فاذا كان مجالها {1,2,3,4,5،.....}فأنها متوالية غير منتهية .اما اذا كان مجالها من النوع {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}فأنها متوالية منتهية اما المجال المقابل للدالة فهو R مجموعة الاعداد الحقيقية .ويرمز لها بالرمز { a_n } او{ U_n }

{ a_n }={a_1,a_2,a_3,a_4,.....}

a_1=at n=1

a_2=at n=2

a_3=at n=3

.

.

المتتابعة الحسابية: وهي المتتابعة التي يكون فيها ناتج طرح كل حد من الذي يليه يساوي عدد ثابت ويسمى d.

$d=U_{n+1}-U_n$

$a_1=a$

$a_2=a+d$

$a_3=(a+d)+d=a+2d$

$a_4=(a+2d)+d=a+3d$

$a_n=a+(n-1)d$

يستخدم لإيجاد عدد الحدود المجهولة n

العدد الثابت dيسمى الاساس.

مثال1 :اكتب المتوالية العددية التالية $a_{n=}\ n^2+1$

$n=\{7,8,9,10.....،20\}$

$a_1=1^2+1=2$

$a_2=2^2+1=5$

$a_3=3^2+1=10$

:

$a_{20}=20^2+1=401$

$\{a_n\}=\{2,5,10,.....410\}$

مثال2 :اكتب المتوالية العددية التالية حيث ان

$$\{U_n\}=\left\{ {}^{1}/_{n^2} \quad \text{فردي} \quad n\leq 5 \;\middle|\; n+1 \quad \text{زوجي} \quad n\leq 6 \right\}$$

$U_1=1/1^2=1$

$U_2=2+1=3$

$U_{3=}1/3^2=1/9$

$U_4=4+1=5$

$U_5=1/5^2=1/25$

$U_6=6+1=7$

$\{ U_n \}=\{1 , 3 , 1/9 , 5 , 1/25 , 7 \}$

مثال 3: جد الحد العاشر من المتتابعة الحسابية التي حدها الاول يساوي 3واساسها يساوي 3 .

$a=3$

$d=3$

$a_{10}=a+9d$

$a_{10}=3+9*3=30$

مثال 4: اكتب المتتابعة التي حدها الاول 7واساسها 3-.او اكتب قيمة الحدود الستة الاولى فقط.

$a=7$

$d=-3$

$a_1=7$

$a_2=a_1+d=7-3=4$

$a_3=a_1+2d=7+2(-3)=1$

$a_4=a_1+3d=7+3(-3)=-2$

$a_5=a_1+4d=7+4(-3)=-5$

$a_6=a_1+5d=7+5(-3)=-8$

$\{a_n\}=\{7,4,1,-2,-5,-8,.....\}$

مثال 5: متتابعة حسابية حدها الثالث 9 وحدها السابع 3 - أوجد الحدود المحصورة بين الثالث والسابع .

$a_3=a+2d \longrightarrow 9=a+2d$ 1

$a_7=a+6d \longrightarrow -3=a+6d$ 2

بحل المعادلتين انيا بواسطة الطرح ينتج المعادلة التالية

$12= -4d$

$d=12/-4= -3$

بالتعويض في معادلة 1 $9=a+(2*-3)$

$9=a-6$

$a_1=15$

$a_3=9$

$a_2=a+d=15+(-3)=12$

$a_4=a+3d=15+(3*-3)=6$

$a_5=a+4d=15+(4*-3)=3$

$a_6=a+5d=15+(5*-3)=0$

$a_7=a+6d=15+(6*-3)= -3$

$\{a_n\}=\{15,12,9,6,3,0, -3\}$

مثال 6:جد عدد الحدود n للمتتابعة الحسابية .

$\{a_n\}=\{-20,-17,-14,\ldots\ldots\ldots\ldots,55\}$

$a=a_1=-20$ الحد الاول

$d=a_2-a_1=-17-(-20)=3$ الاساس

$a_n=a_1+(n-1)d$

$55=-20+(n-1)*3$

$55=-20+3n-3$

$55=-23+3n$

$55+23=3n$

$78=3n$

$n=78/3$

$n=26$ عدد حدود المتتابعة الحسابية

<u>ايجاد مجموع حدود المتتابعة الحسابية المنتهية</u>

$\{a_n\}=\{ a_1, a_2, a_3, a_4,\ldots\ldots\ldots\ldots, a_n\}$

$S_n=(n/2)\ [a+ a_n]$

ايجاد مجموع حدود المتتابعة الحسابية غير المنتهية

$\{a_n\}=\{ a_1, a_2, a_3, a_4,\ldots\ldots\ldots\ldots \}$

$S_n=(n/2)\ [2a+(n-1)d]$

مثال 7:اوجد مجموع 20 حدا من المتتابعة الحسابية حدها الاول (-8) والعشرين (48).

$a_1 = -8$

$a_{20} = 48$

n=20

$S_n = {}^{n}/_{2}\,[a_1 + a_n]$

$S_n = {}^{20}/_{2}\,[-8 + 48]$

$S_n = 10[40] = 400$

Summation is 400

مثال 8:اوجد مجموع حدود المتتابعة الحسابية {1,2,3,.....,100}

$a_1 = 1$

$d = a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$

∴ المتتابعة منتهية

n = 100

$S_n = {}^{n}/_{2}\,[a_1 + a_n]$

$S_n = {}^{100}/_{2}\,[1 + 100]$

$S_n = 50[101] = 5050$

مثال 9: اوجد مجموع حدود المتتابعة الحسابية {2,5,8,.....,29}

$$a_1 = 2$$

$$d = a_2 - a_1 = 5 - 2 = 3$$

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$29 = 2 + (n-1) * 3$ ∴ المتتابعة منتهية

$29 = -1 + 3n$

$3n = 30$

$n = 10$

$$S_n = {}^{n}/_{2}\,[a_1 + a_n]$$

$$S_n = {}^{10}/_{2}\,[2 + 29]$$

$$S_n = 5[31] = 155$$

مثال 10: المتتابعة الحسابية التي حدها الثاني =4 وحدها ما قبل الاخير (22) وعدد حدودها 12 جد مجموعها .

$$\{-, 4, -, \dots\dots, 22, a_n\}$$

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1}$$

$$a_1 + a_n = 4 + 22$$

$$a_1 + a_n = 26$$

n= 12

$$S_n = {}^{n}/_{2}\,[a_1 + a_n]$$

$$S_n = {}^{12}/_{2}\,[26]$$

$$S_n = 6[26] = 156$$

<u>ايجاد مجموع حدود المتتابعة الحسابية الغير المنتهية</u>

<u>مثال 11:</u> جد مجموع الحدود الثمانية الاولى من المتتابعة التالية

$$\{-, 4, 1, 6, \dots\dots\dots\dots\dots.\}$$

S_n=(n/2) [2a+(n-1)d]

n=8

a_1=-4

d=a_2-a_1=1-(-4)=5 .....الاساس

S_n=(8/2) [2(-4)+(8-1)5]

S_n=(4)[-8+7*5]

S_n=(4)[-8+7*5]

S_n=(4)[27]=108

مثال 12: اذا كان مجموع n حدا من المتتابعة الحسابية $3n^2+2n$ فما هو حدها العشرين (20).

$S_n=3n^2+2n$

مجموع الحد العشرون ..... $S_{20}=(3*20^2)+(2*20)$

$S_{20}=1200+40=12400$

مجموع الحد التاسع عشر ..... $S_{19}=(3*19^2)+(2*19)$

$S_{19}=(3*361)+(38)=1121$

$a_{20}=S_{20}-S_{19}$

$a_{20}=1240-1121=119$

مثال 13: جد مجموع الاعداد الصحيحة المحصورة بين 400 و100وتقبل القسمة على 3.

$d=3$

$100/3=33$ والباقي 1

$400/3=133$ والباقي 1

$133*3=399$ الحد الاخير a_n

$33*3=102$ الحد الاول a_1

{102,……..,399}

$a_n=a_1+(n-1)d$

$399=102+(n-1)*3$

$n=100$

$$S_n = {}^{n}/_{2}\,[a_1 + a_n]$$

$$S_n = {}^{100}/_{2}\,[102 + 399]$$

S_n=25050

<u>المتتابعة الهندسية :</u> وهي المتتابعة التي ليس فيها حد يساوي صفر ويكون ناتج القسمة لأي حد فيها على سابقة يساوي مقدار ثابت R.

$R=a_{n+1}/a_n$ or $r=a_{n+1}/a_n$

<u>انواع المتتابعات الهندسية :</u>

1-اذا كانت a_1 موجبة

r<1 (موجبة) تكون المتتابعة الهندسية تنازلية {4,2,1,1/2.....}

r =1 تكون المتتابعة الهندسية ثابتة {2,2 ,2,2,2.....}

r>1 (موجبة) تكون المتتابعة الهندسية تصاعدية {4,8,10, ...}

r<1 (سالبة) تكون المتتابعة الهندسية تنازلية الحد الاول موجب والحد الثاني سالب والثالث موجب والرابع سالب وهكذا {4,- 2,1,- 1,2.....}

2-اذا كانت a_1 سالبة

r<1 (موجبة) تكون المتتابعة الهندسية تصاعدية

{-4,-2,-1,-1/2,.....}

r =1 تكون المتتابعة الهندسية ثابتة {-2,-2 ,-2,-2,-2.....}

r>1 (موجبة) تكون المتتابعة الهندسية تصاعدية

.{-4,-8,-16, ...}

r<1 (سالبة) تكون المتتابعة الهندسية تنازلية الحد الاول سالب والحد الثاني موجب والثالث سالب والرابع موجب

وهكذا {-4, 2,-1, 1,2.....}

$R=a_{n+1}/a_n$

$a_1=a$

$a_2=ar$

$a_3= a*r*r=ar^2$

$a_4=a\ r^2*r= ar^3$

$a_5=a\ r^3*r= ar^4$

$a_6=a\ r^4*r= ar^5$

$a_{10}=a\ r^8*r= ar^9$

$a_{25}=a\ r^{23}*r= ar^{24}$

$a_n=ar^{n-1}$

مثال 1: اكتب الحدود الستة الاولى من المتتابعة الهندسية التي حدها الاول (64)واساسها (-1/2).

$a_1=a=64$

$a_2=ar$

$a_2=ar=64*(-1/2)=-32$

$a_3= ar*r=-32* (-1/2)=16$

$a_4=a r^2*r= 16* (-1/2)=-8$

$a_5=a r^3*r= -8* (-1/2)=4$

$a_6=a r^4*r= ar^5* (-1/2) =-2$

$\{a_n\}=\{64,-32, 16,-8,4,-2 \ldots\ldots\ldots\ldots\}$

<u>مثال 2:</u> جد الحد السابع من المتتابعة الهندسية التي حدها الاول (-1/4)واساسها (2).

$a_7= ar^6$

$a_7=-1/4*2^6=-1/4*64=-16$

<u>مثال 3:</u> جد الحد الثامن من المتتابعة الهندسية التي حدها الاول (3)والخامس (48).

$a_5= ar^4$

$48=3* r^4$ ...../3

$16= r^4$

$2^4= r^4$

$r = \pm 2$

$a_8 = ar^7$

$a_8 = 3*(\pm 2)^7$

$a_8 = 3*(\pm 128)$

$a_8 = \pm 384$

<u>مثال 4:</u>جد الحد السادس لمتوالية هندسية مجموع حدودها الثلاثة الاولى (7)وحدها الثالث (1).

$a_1 + a_2 + a_3 = 7$

$a + a r + a r^2 = 7$

$a_3 = 1$

$a_3 = a r^2$

$a r^2 = 1$

$a = 1/r^2$

$(1/r^2) + (1/r^2) * r + (1/r^2) * r^2 = 7$

$(1/r^2) + (1/r) + 1 = 7$

$(1/r^2) + (1/r) + 1 - 7 = 0$ ..... $* \ r^2$

$1 + r - 6 r^2 = 0$ ..... -1

$6 r^2 - r - 1 = 0$

$(3 r + 1)(2 r - 1) = 0$

if $3r+1=0$ ⟶ $r=-1/3$ يهمل لان المتتابعة موجبة الاساس

$2r-1=0$ $r=1/2$

$a_1=1/(1/2)^2=4$

$a_6=a_1*r^5$

$a_6=4*(1/2)^5=4*1/32=1/8$

$a_6=1/8$

$\{a_n\}=\{4,\ldots,\ ..,..,..,1/8,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\}$

مجموع المتتابعة الهندسية النهائية:

$\{a_n\}=\{4,8,16,32,64,128\}$

$$S_n=\frac{a(1-(r)^n)}{(1-r)}$$

مثال 5: جد مجموع ستة من الحدود الاولى من المتتابعة الهندسية

$\{a_n\}=\{64,32,16,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\}$

$a=64$

$a_2=32$

$r=a_2/a_1$

$r=32/64=1/2$

$n=6$

$$S_6 = {64(1-(1/2)^6)}/{(1-1/2)}$$

$$S_6 = {64(1-(1/64)\ )}/{1/2}$$

$$S_6 = {64(63/64)\ )}/{1/2}$$

$$S_6 = 63 * 2 = 126$$

مجموع متتابعة هندسية اللانهائية:

$$S_n = \frac{a}{1-r}$$

مثال 6: جد مجموع المتتابعة

$$\left\{ {}^{1}/_{2}, {}^{1}/_{4}, {}^{1}/_{5}, \ldots\ldots \right\}$$

$$a = {}^{1}/_{2}$$

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{{}^{1}/_{4}}{{}^{1}/_{2}} = {}^{1}/_{4} * 2 = {}^{1}/_{2}$$

$$S_n = \frac{{}^{1}/_{2}}{1-{}^{1}/_{2}} = \frac{{}^{1}/_{2}}{{}^{1}/_{2}} = 1$$

مثال 7: جد مجموع المتتابعة الهندسية

$$\{0.4\,,0.04\,,0.004\,,\ldots\ldots,\infty\}$$

0.4+0.04+0.004+.....+∞

$$a = a_1 = 0.4$$

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{0.04}{0.4} = \frac{1}{10} = 0.1$$

$$S_n = \frac{a}{1-r} = \frac{0.4}{1-0.1} = \frac{0.4}{0.9} = \frac{4}{9}$$

مثال 8: جد مجموع المتتابعه الهندسية

64-16+4-.....

a =64

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-16}{64} = \frac{-1}{4}$$

$$S_n = \frac{a}{1-r} = \frac{64}{1-(1/4)} = \frac{64}{5/4} = 64 * \frac{4}{5} = \frac{256}{5}$$

مثال 9: اذا كان مجموع متتابعة هندسية اساسها=3 هو728 وحدها الاخير هو 486 جد حدها الاول وعدد حدودها؟

$$S_n = 728$$

r =3

$$728 = \frac{a(1-3^n)}{1-3}$$

$$728 = \frac{a(1-3^n)}{-2}$$

$$a - a3^n = -1456$$

$$a_n = 486$$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$486 = a3^{n-1}$$

$$[486 = a.3^n.3^{-1}] * 3$$

$$1458 = a3^n$$

نعوض معادلة2 في معادلة 1

$$a - 1458 = -1456$$

a= 1458-1456=2

a= 2

$$a_n = ar^{n-1}$$

$$[486 = 2 * r^{n-1}] * 3$$

$$1486 = 2 * 3^n$$

$$3^6 * 2 = 2 * 3^n$$

$$3^6 = 3^n$$

n= 6

$n = 6$ وعدد الحدود $\quad a_1 = 2$

المصادر :-

1) طرق عددية د. علي سيفي

2) طرق حل المعادلات التفاضلية الاعتيادية وتطبيقاتها د. رياض شاكر

3) الرياضيات / رشيد حازم مجيد عسكر ، قاسم عبد الرزاق

4) References Calculus (Thomas)

5) Series Shomes

6) حساب التفاضل والتكامل / فرانك أيرز.

7) التفاضل والتكامل / خالد احمد السامرائي .

8) الجبر والهندسة التحليلية / د. فؤاد محمد .

9) مبادئ الجبر الخطي د.موفق حجه ، د.محمد هيلات .

10) مقدمة في المعادلات التفاضليه الاعتياديه وتطبيقاتها

د.سمير يشير حديد ، د.علي محمد صادق سيفي .